

# Compression des Données

---

## Plan

### Programme du M1: Techniques de codage et théorie de l'information

- I. Introduction
- II. Méthodes statistiques
  - Introduction à la théorie de l'information
  - Codes à taille variable
    - Codage d'Huffman
    - Codage de Shannon-Fano
- III. Méthodes de compression avec mémoire
  - Codage arithmétique
  - Méthodes à base de dictionnaire
    - LZ77
    - LZW

### Programme du M2: Compression du Signal et des Images

- I. Compression des images binaires
  - 1.1 Fax
  - 1.2 JBIG
  - 1.3 JBIG2
- II. Compression des Images en niveaux de gris et couleur
  - 2.1 Compression d'images par DCT : JPEG
  - 2.2 Compression par ondelettes : JPEG2000
    - Rappel : Compression du signal par bancs de filtres : MP3
    - Généralisation au cas 2D,
    - Notion d'ondelette
    - Analyse multi-résolution
    - Exercice : transformée de Haar

<http://Thierry.Paquet.free.fr>

Année 2011-12

# Introduction

---

## Compression d'Images par transformée

**Principe:**

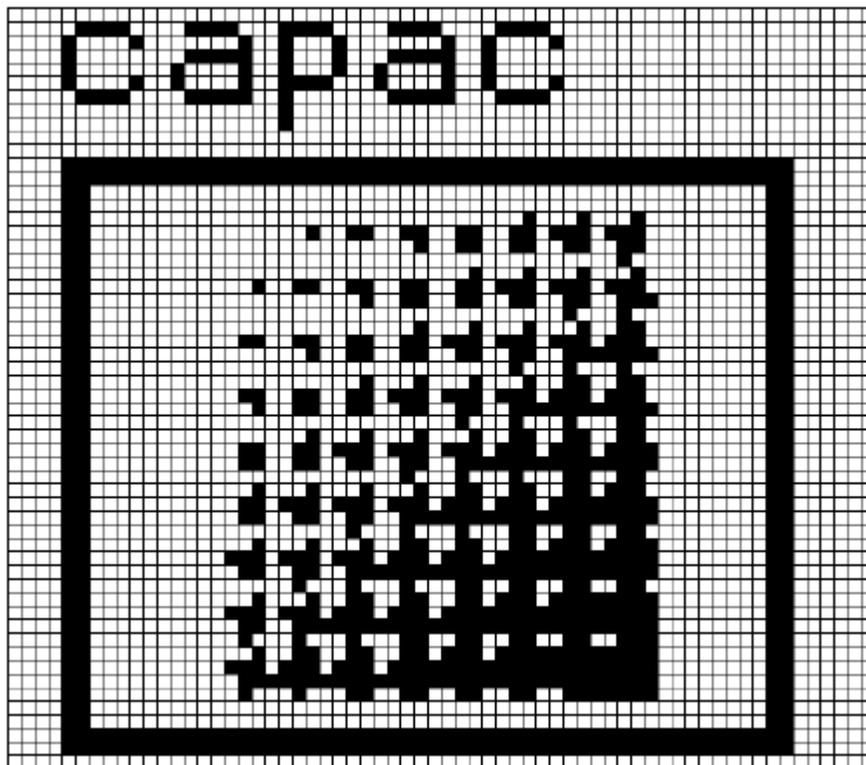
- Tenir compte du voisinage du pixel pour coder sa valeur
- Redondance spatiale
- Les valeurs des pixels sont corrélées

## Approches possibles

- 1- Images binaires: RLE + Huffman = Fax
- 2- Images binaire: fréquence du n voisinage du pixel
- 3- Images Ngris : compression RLE par plan
- 4- Image Ngris: Prédiction du pixel en fonction du voisinage + codage de l'erreur avec un code variable
- 5- Image Ngris: Compression d'une Image transformée
- 6- Image couleur: Compresser chacune des trois couleurs de base
- 7- Compression de petits blocs de l'image (Fractales)

# 1. Compression des images Binaires

---



# 1.1. Images Binaires : Compression des FAX

---

## Norme de l'International Telecommunication Union (ITU)

depuis 1993 CCITT:

Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique

Norme T4 (Groupe3): Réseaux commutés standards: 9600 baud

Norme T6 (Groupe 4): Réseaux numériques 64Kbits

## Groupe 3: codage mono-dimensionnel

Résolution Horizontale

Scan à 8.05 points par millimètres largeurs de l'image: 1664 pixels

Résolution Verticale

3.85 lignes par mm                      7.7 (fine mode)      15.4 (very fine mode)

Nbr de Lignes	Pixels/ligne	Pixels/page	Temps
978	1664	1.67 M	170
1956	1664	3.255 M	339
3912	1664	6.51 M	678

## Compression Groupe 3 (1)

---

**Compression:** Évaluation des Run-Length sur 8 documents Différents

les plus fréquents: 2,3,4 pixels noirs  $\longrightarrow$  les codes les plus courts  
2 à 7 pixels blancs

### RLE + Huffman

Run Length = 1 à 63 pixels (codes terminaux) +  
+ multiples de 64 (codes de mise en page= « make-up codes »)

Exemple: 12 pixels blancs = 001000

76 pixels blancs = 11011,001000 = 64+12

64 pixels noirs = 0000001111,0000110111 = 64+0

2561 pixels noirs = 000000011111,010 = 2560+1

Chaque ligne est codée séparément et se termine par EOL= 000000000001

1 pixel blanc est placé systématiquement en début de ligne et éliminé au décodage

Chaque page comporte 1 caractère EOL en début et 6 EOL en fin

# Codes RLE Compression Groupe 3 et 4 (2)

## Codes terminaux

Run length	White code-word	Black code-word	Run length	White code-word	Black code-word
0	00110101	0000110111	32	00011011	000001101010
1	000111	010	33	00010010	000001101011
2	0111	11	34	00010011	000011010010
3	1000	10	35	00010100	000011010011
4	1011	011	36	00010101	000011010100
5	1100	0011	37	00010110	000011010101
6	1110	0010	38	00010111	000011010110
7	1111	00011	39	00101000	000011010111
8	10011	000101	40	00101001	000001101100
9	10100	000100	41	00101010	000001101101
10	00111	0000100	42	00101011	000011011010
11	01000	0000101	43	00101100	000011011011
12	001000	0000111	44	00101101	000001010100
13	000011	00000100	45	00000100	000001010101
14	110100	00000111	46	00000101	000001010110
15	110101	000011000	47	00001010	000001010111
16	101010	0000010111	48	00001011	000001100100
17	101011	0000011000	49	01010010	000001100101
18	0100111	0000001000	50	01010011	000001010010
19	0001100	00001100111	51	01010100	000001010011
20	0001000	00001101000	52	01010101	000000100100
21	0010111	00001101100	53	00100100	000000110111
22	0000011	00000110111	54	00100101	000000111000
23	0000100	00000101000	55	01011000	000000100111
24	0101000	00000010111	56	01011001	000000101000
25	0101011	00000011000	57	01011010	000001011000
26	0010011	000011001010	58	01011011	000001011001
27	0100100	000011001011	59	01001010	000000101011
28	0011000	000011001100	60	01001011	000000101100
29	00000010	000011001101	61	00110010	000001011010
30	00000011	000001101000	62	00110011	000001100110
31	00011010	000001101001	63	00110100	000001100111

## Codes de mise en page

Run length	White code-word	Black code-word	Run length	White code-word	Black code-word
64	11011	0000001111	1344	011011010	0000001010011
128	10010	000011001000	1408	011011011	0000001010100
192	010111	000011001001	1472	010011000	0000001010101
256	0110111	000001011011	1536	010011001	0000001011010
320	00110110	000000110011	1600	010011010	0000001011011
384	00110111	000000110100	1664	011000	0000001100100
448	01100100	000000110101	1728	010011011	0000001100101
512	01100101	0000001101100	1792	00000001000	same as
576	01101000	0000001101101	1856	00000001100	white
640	01100111	0000001001010	1920	00000001101	from this
704	011001100	0000001001011	1984	000000010010	point
768	011001101	0000001001100	2048	000000010011	
832	011010010	0000001001101	2112	000000010100	
896	011010011	0000001110010	2176	000000010101	
960	011010100	0000001110011	2240	000000010110	
1024	011010101	0000001110100	2304	000000010111	
1088	011010110	0000001110101	2368	000000011100	
1152	011010111	0000001110110	2432	000000011101	
1216	011011000	0000001110111	2496	000000011110	
1280	011011001	0000001010010	2560	000000011111	

# Codage bi-dimensionnel Groupe 3 et 4 (1)

---

**Groupe 3 optionnel, Groupe 4 toujours**

**Meilleur pour Images en Niveaux de Gris**

**Codage relatif de chaque ligne par rapport à la précédente**

La première ligne du document est supposée blanche

Chaque ligne commence par un pixel blanc

Moins robuste que mono-dimensionnel par ligne

G3: Codage mono-dimensionnel toutes les 2 ou 4 lignes

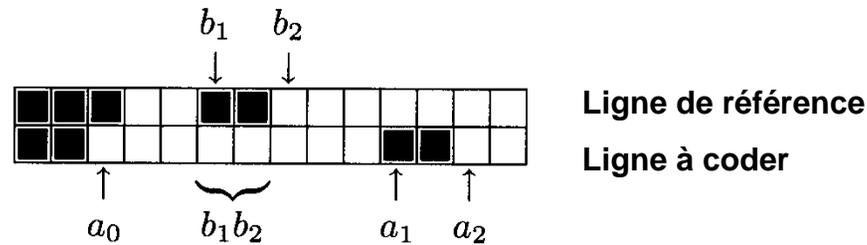
G4: Bi-dimensionnel sur le document complet

## Codage bi-dimensionnel Groupe 3 et 4 (2)

---

### Principe:

$a_0a_1$  est le run courant à coder et le suivant est  $a_1a_2$



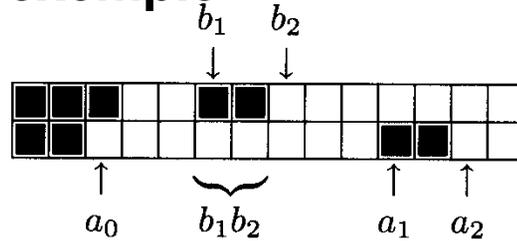
On code en fonction de  $b_1b_2$  sur le ligne de référence  
 $b_1$  1er pixel à droite de  $a_0$  de couleur différente

**Mode Pass:** Quand  $b_1b_2$  à gauche de  $a_1a_2$

# Codage bi-dimensionnel Groupe 3 et 4 (2)

Mode

exemple



condition

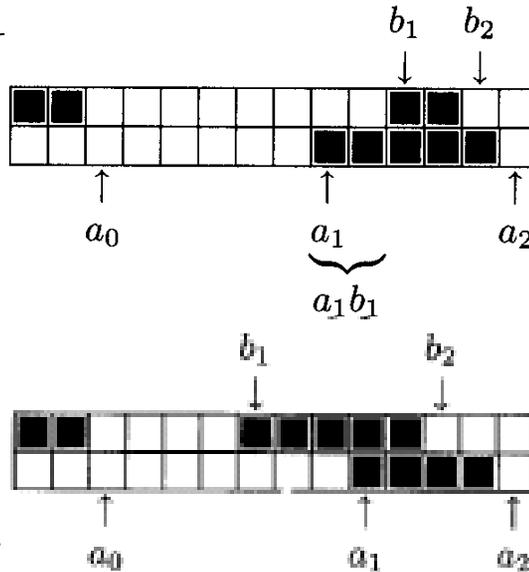
élément codé

Mode pass

pas de recouvrement  
de  $b_1b_2$  sur  $a_1a_2$   
 **$b_2$  à gauche de  $a_1$**

Coder le run  $b_1b_2$   
puis  $a_0=b_2$ .

Mode Vertical



Recouvrement de moins de  
3 pixels de  $b_1b_2$  sur  $a_1a_2$   
 **$a_1b_1 = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$**

Coder le run  $a_1b_1$   
puis  $a_0=a_1$

2

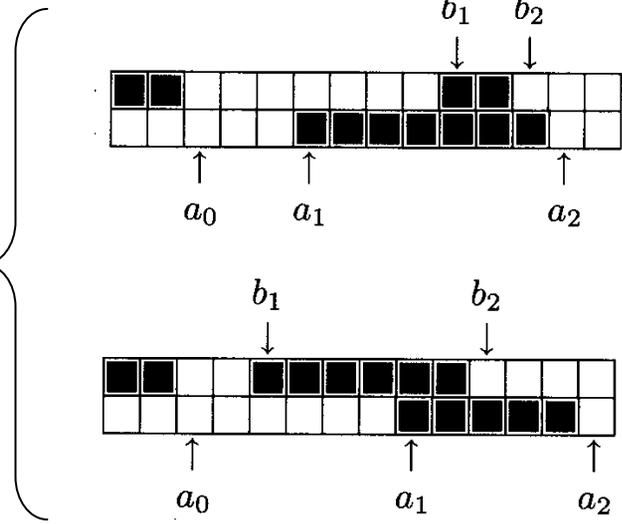
000010

-3

0000011

# Codage bi-dimensionnel Groupe 3 et 4 (3)

Mode horizontal



$b_1 b_2$  recouvre  $a_1 a_2$  de plus de 3 pixels  
 $a_1 b_1 > 3$  pixels

Coder les run  $a_0 a_1$  et  $a_1 a_2$  puis déplacer  $a_0$  en  $a_2$

3 7

6 5

# Codage bi-dimensionnel Groupe 3 et 4 (4)

Mode	Run length to be encoded	Abbreviation	Codeword
Pass	$b_1b_2$	P	0001+coded length of $b_1b_2$
Horizontal	$a_0a_1, a_1a_2$	H	001+coded length of $a_0a_1$ and $a_1a_2$
Vertical	$a_1b_1 = 0$	V(0)	1
	$a_1b_1 = -1$	VR(1)	011
	$a_1b_1 = -2$	VR(2)	000011
	$a_1b_1 = -3$	VR(3)	0000011
	$a_1b_1 = +1$	VL(1)	010
	$a_1b_1 = +2$	VL(2)	000010
	$a_1b_1 = +3$	VL(3)	0000010
Extension			0000001000

## Initialisation

$a_0$  = pixel blanc à gauche de l'image

$a_1$  = premier point noir

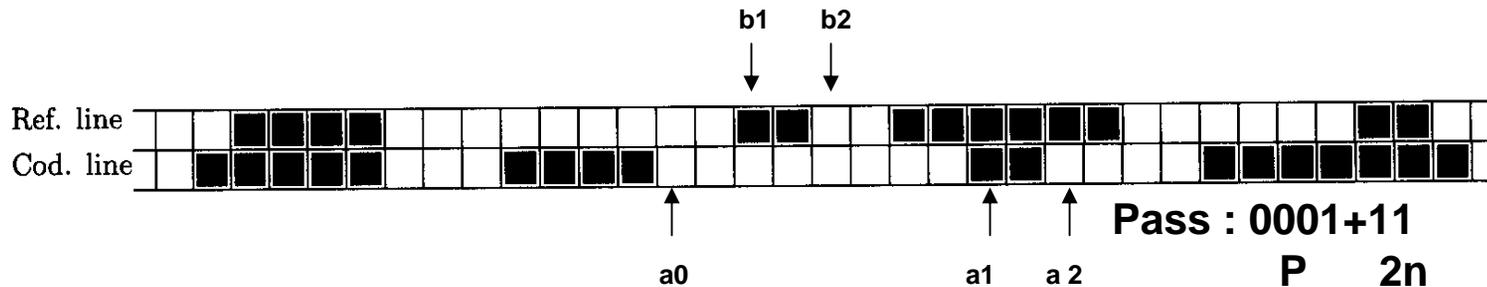
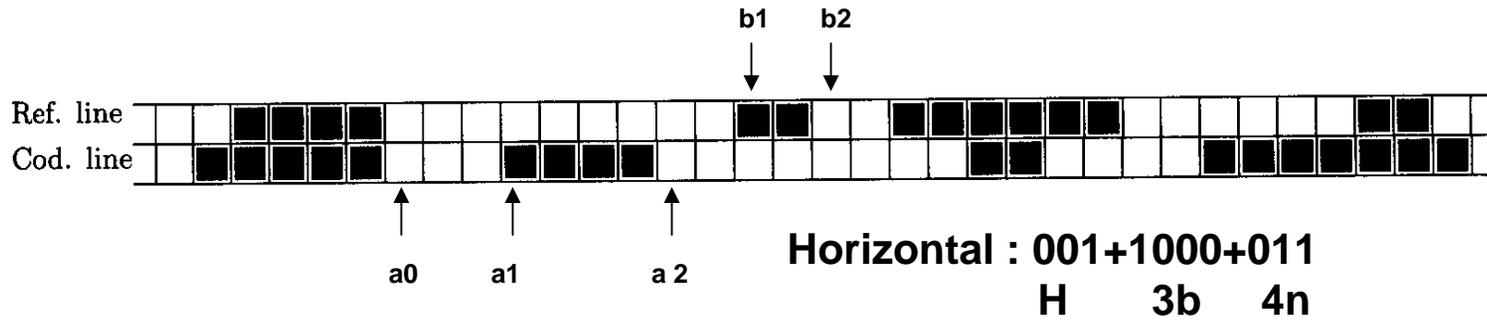
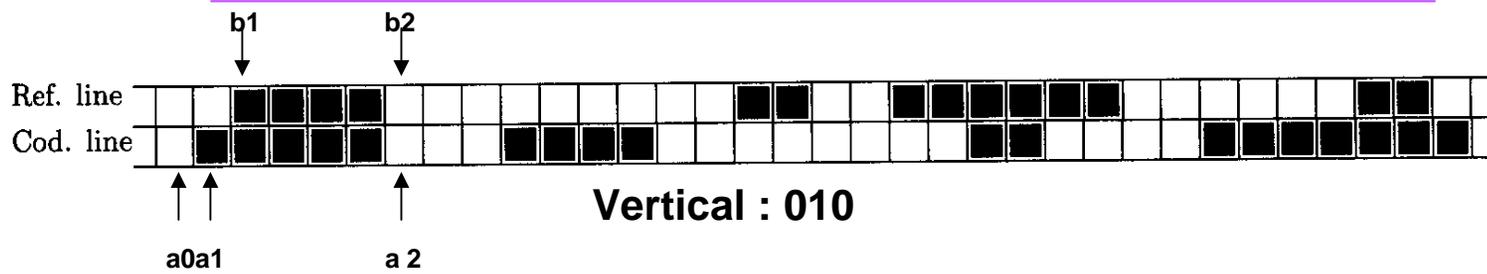
$a_2$  premier blanc suivant

et  $\text{abs}(a_0a_1)=-1$

$b_1$  premier pixel à droite de  $a_0$  de couleur différente

$b_2$  premier pixel à droite de  $b_1$  et de couleur différente

# Codage bi-dimensionnel Groupe 3 et 4 (5)



## 1.2. Image Binaires : Compression JBIG (1999)

---

**Joint Bi-Level Image Processing Group**

**Norme ITU T.82** (International Telecommunication Union – Telecommunication sector)

**S'inspire de l'algorithme de compression arithmétique** (Cours de M1)

**Adapté à un alphabet binaire (0/1 : Noir/Blanc)**

**Tire profit des propriétés des images binaire** (images de documents)

## 1.2. Image Binaires : Compression JBIG

---

### Exemple introductif:

Supposons un image binaire International avec les propriétés statistiques suivantes:

20% de pixels Noirs

80% de pixels Blancs

L'entropie de l'image est :  $H = -0,2 \log_2(0,2) - 0,8 \log_2(0,8) = 0,722 \text{ bits}$

Si on utilise un seul codeur arithmétique pour coder cette source on atteindra un taux d'allocation de bits proche de 0,722 bits par pixel

Mais la distribution des pixels n'est pas constante sur toute l'image

Supposons qu'on puisse distinguer deux groupes de pixels dans l'image (zone de texte / zone d'image par exemple)

Supposons que le premier groupe représente 70% des pixels de l'image et 30% le second

## 1.2. Image Binaires : Compression JBIG

---

### Exemple introductif suite:

Supposons qu'on puisse distinguer deux groupes de pixels dans l'image (zone de texte / zone d'image par exemple)

Supposons que le premier groupe représente 70% des pixels de l'image et 30% le second

Imaginons que dans le premier groupe de pixel

- la probabilité de rencontrer un pixel Blanc est 0,95

Dans le second groupe elle est de 0,3

L'entropie associée au premier groupe de pixels est **0,286 bits**

L'entropie associée au second groupe de pixels est **0,881 bits**

Alors si on utilise deux codeurs différents un pour chaque groupe de pixels on obtient un taux d'allocation de bits moyen de l'ordre de  **$0,286 * 0,7 + 0,881 * 0,3 = 0,4645$  bits par pixel**

## 1.2. Image Binaires : Compression JBIG

---

### Principe de JBIG

Utiliser le principe du codage arithmétique et changer la table de probabilités binaire du codeur en fonction du voisinage du pixel

On utilise des masques de 10 pixels voisins déjà parcourus

	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	

*en rouge le pixel courant à coder*

	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0		

On peut ainsi utiliser jusqu'à 1024 codeurs arithmétiques différents

# 1.2. Image Binaires : Compression JBIG

## Principe de JBIG: Description du codeur arithmétique

Rappels:

Table de probabilité et Choix des intervalles

Chaîne à coder: **SWISS MISS**



On met à jour les 3 paramètres qui définissent l'intervalle courant à chaque lecture d'un nouveau symbole

Valeur initiales :  $\text{Inf}(0) = 0$   $\text{Sup}(0) = 1$   $\text{Echelle}(0) = 1$

S est dans  $[0.5 \ 1[$  donc  $\text{Inf}(1) = \text{Inf}(0) + \text{Echelle}(0) * \text{Inf}(S) = 0.5$

$\text{Sup}(1) = \text{Inf}(0) + \text{Echelle}(0) * \text{Sup}(S) = 1$

$\text{Echelle}(1) = \text{Sup}(1) - \text{Inf}(1) = 0.5$



W  $[0.4 \ 0.5[$  donc  $\text{Inf}(2) = 0.7$

$\text{Sup}(2) = 0.75$

$\text{Echelle}(2) = 0.05$



S  $[0.5 \ 1[$  donc  $\text{Inf}(n) = \text{Inf}(n-1) + \text{Echelle}(n-1) * \text{Inf}(S) = 0.71753375$

$\text{Sup}(n) = \text{Inf}(n-1) + \text{Echelle}(n-1) * \text{Sup}(S) = 0.717535$

On conserve  $\text{Inf}(n) = 0.71753375$  on code **71753375**

## 1.2. Image Binaires : Compression JBIG

### Principe de JBIG: Description du codeur arithmétique

#### Adaptation au cas binaire

L'équation de mise à jour du code est :  $Inf(n) = Inf(n-1) + Echelle(n-1) \times Inf(Symbole)$   
où les caractères sont maintenant soit 0 soit 1

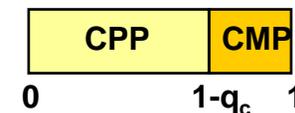
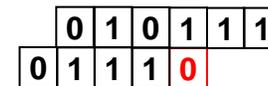
Plutôt que de travailler sur les 0 et les 1 on distingue à chaque itération

- Le Caractère le Plus Probable (**CPP**)
- Le Caractère le Moins Probable (**CMP**)

On not C les 10 bits de contexte du pixel courant

On note  $q_c$  la probabilité du CMP dans le contexte C

On choisit d'attribuer le CPP à l'intervalle de gauche



## 1.2. Image Binaires : Compression JBIG

---

### Principe de JBIG: Description du codeur arithmétique

#### *Adaptation au cas binaire*

Dans le cas du CPP les équations de mise se simplifient en

$$Inf(n) = Inf(n-1)$$

$$Echelle(n) = Echelle(n-1) \times (1 - q_c)$$

Dans le cas du CMP les équations sont

$$Inf(n) = Inf(n-1) + Echelle(n-1) \times (1 - q_c)$$

$$Echelle(n) = Echelle(n-1) \times q_c$$

## 1.2. Image Binaires : Compression JBIG

---

### Principe de JBIG: Description du codeur arithmétique

#### *Simplification dans le cas binaire*

Eviter les multiplications qui prennent du temps

On « s'arrange » pour maintenir le paramètre Echelle proche de 1 par une mise l'échelle

Alors les équations deviennent

pour un CPP  $Inf(n) = Inf(n-1)$

$$Echelle(n) = 1 - q_c$$

pour un CMP  $Inf(n) = Inf(n-1) + (1 - q_c)$

$$Echelle(n) = q_c$$

## 1.2. Image Binaires : Compression JBIG

---

### Principe de JBIG: Description du codeur arithmétique

#### **Contrôle des débordements d'échelle**

Il faut s'assurer que le facteur d'échelle reste proche de 1.

Typiquement dans l'intervalle  $[0.75, 1.5]$

Si  $Echelle(n) < 0.75$  alors on la double ce qui correspond à un décalage à gauche

Dans ce cas on double aussi  $Inf(n)$

Les bits perdus du fait du décalage à gauche représentent la **sortie du codeur**

Les équations de mise à jour d'un CMP montrent que l'échelle devient inférieure à 0.75

$$Echelle(n) = Echelle(n-1) \times q_c \quad \text{car } q_c < 0.5$$

**Ceci engendre une multiplication par 2 systématiquement**

Une mise à l'échelle peut intervenir sur un CPP mais pas systématiquement

## 1.2. Image Binaires : Compression JBIG

### Principe de JBIG: Description du codeur arithmétique

#### *Mise à jour des tables de probabilité*

La probabilité  $q_c$  du caractère le moins probable (CMP) est modifiée lors de toute remise à l'échelle dans le contexte C

La modification est effectuée par lecture dans une table prédéfinie de valeurs

- on met à jour par la valeur immédiatement supérieure si c'est un CMP
- on met à jour par la valeur immédiatement inférieure si c'est un CPP

$Q_e$ index	Hex $Q_e$	Dec $Q_e$	Decr LPS	Incr MPS	MPS exch	$Q_e$ index	Hex $Q_e$	Dec $Q_e$	Decr LPS	Incr MPS	MPS exch
0	0AC1	0.50409	0	1	1	15	0181	0.07050	2	1	0
1	0A81	0.49237	1	1	0	16	0121	0.05295	2	1	0
2	0A01	0.46893	1	1	0	17	00E1	0.04120	2	1	0
3	0901	0.42206	1	1	0	18	00A1	0.02948	2	1	0
4	0701	0.32831	1	1	0	19	0071	0.02069	2	1	0
5	0681	0.30487	1	1	0	20	0059	0.01630	2	1	0
6	0601	0.28143	1	1	0	21	0053	0.01520	2	1	0
7	0501	0.23456	2	1	0	22	0027	0.00714	2	1	0
8	0481	0.21112	2	1	0	23	0017	0.00421	2	1	0
9	0441	0.19940	2	1	0	24	0013	0.00348	3	1	0
10	0381	0.16425	2	1	0	25	000B	0.00201	2	1	0
11	0301	0.14081	2	1	0	26	0007	0.00128	3	1	0
12	02C1	0.12909	2	1	0	27	0005	0.00092	2	1	0
13	0281	0.11737	2	1	0	28	0003	0.00055	3	1	0
14	0241	0.10565	2	1	0	29	0001	0.00018	2	0	0

# 1.2. Image Binaires : Compression JBIG

$Q_e$ index	Hex $Q_e$	Next-Index LPS	MPS exch	$Q_e$ index	Hex $Q_e$	Next-Index LPS	MPS exch	$Q_e$ index	Hex $Q_e$	Next-Index LPS	MPS exch
0	5A1D	1	1	57	01A4	55	58	58	0160	56	59
1	2586	14	0	58	0160	56	59	59	0125	57	60
2	1114	16	0	59	0125	57	60	60	00F6	58	61
3	08DB	18	0	60	00F6	58	61	61	00CB	59	62
4	03D8	20	0	61	00CB	59	62	62	00AB	61	63
5	01DA	23	0	62	00AB	61	63	63	008F	61	32
6	00E5	25	0	63	008F	61	32	64	5B12	65	65
7	006F	28	0	64	5B12	65	65	65	4D04	80	66
8	0036	30	0	65	4D04	80	66	66	412C	81	67
9	001A	33	0	66	412C	81	67	67	37D8	82	68
10	000D	35	0	67	37D8	82	68	68	2FE8	83	69
11	0006	9	0	68	2FE8	83	69	69	293C	84	70
12	0003	10	0	69	293C	84	70	70	2379	86	71
13	0001	12	0	70	2379	86	71	71	1EDF	87	72
14	5A7F	15	1	71	1EDF	87	72	72	1AA9	87	73
15	3F25	36	0	72	1AA9	87	73	73	174E	72	74
16	2CF2	38	0	73	174E	72	74	74	1424	72	75
17	207C	39	0	74	1424	72	75	75	119C	74	76
18	17B9	40	0	75	119C	74	76	76	0F6B	74	77
19	1182	42	0	76	0F6B	74	77	77	0D51	75	78
20	0CEF	43	0	77	0D51	75	78	78	0BB6	77	79
21	09A1	45	0	78	0BB6	77	79	79	0A40	77	48
22	072F	46	0	79	0A40	77	48	80	5832	80	81
23	055C	48	0	80	5832	80	81	81	4D1C	88	82
24	0406	49	0	81	4D1C	88	82	82	438E	89	83
25	0303	51	0	82	438E	89	83	83	3BDD	90	84
26	0240	52	0	83	3BDD	90	84	84	34EE	91	85
27	01B1	54	0	84	34EE	91	85	85	2EAE	92	86
28	0144	56	0	85	2EAE	92	86	86	299A	93	87
29	00F5	57	0	86	299A	93	87	87	2516	86	71
30	00B7	59	0	87	2516	86	71	88	5570	88	89
31	008A	60	0	88	5570	88	89	89	4CA9	95	90
32	0068	62	0	89	4CA9	95	90	90	44D9	96	91
33	004E	63	0	90	44D9	96	91	91	3E22	97	92
34	003B	32	0	91	3E22	97	92	92	3824	99	93
35	002C	33	0	92	3824	99	93	93	32B4	99	94
36	5AE1	37	1	93	32B4	99	94	94	2E17	93	86
37	484C	64	0	94	2E17	93	86	95	56A8	95	96
38	3A0D	65	0	95	56A8	95	96	96	4F46	101	97
39	2EF1	67	0	96	4F46	101	97	97	47E5	102	98
40	261F	68	0	97	47E5	102	98	98	41CF	103	99
41	1F33	69	0	98	41CF	103	99	99	3C3D	104	100
42	19A8	70	0	99	3C3D	104	100	100	375E	99	93
43	1518	72	0	100	375E	99	93	101	5231	105	102
44	1177	73	0	101	5231	105	102	102	4C0F	106	103
45	0E74	74	0	102	4C0F	106	103	103	4639	107	104
46	0BFB	75	0	103	4639	107	104	104	415E	103	99
47	09F8	77	0	104	415E	103	99	105	5627	105	106
48	0861	78	0	105	5627	105	106	106	50E7	108	107
49	0706	79	0	106	50E7	108	107	107	4B85	109	103
50	05CD	48	0	107	4B85	109	103	108	5597	110	109
51	04DE	50	0	108	5597	110	109	109	504F	111	107
52	040F	50	0	109	504F	111	107	110	5A10	110	111
53	0363	51	0	110	5A10	110	111	111	5522	112	109
54	02D4	52	0	111	5522	112	109	112	59EB	112	111
55	025C	53	0	112	59EB	112	111				
56	01F8	54	0								

Table 2.68: The QM-Encoder Probability Estimation Table.

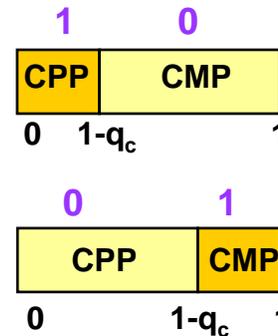
## 1.2. Image Binaires : Compression JBIG

### Contrôle de la valeur assignée au CPP et au CMP

Lors du codage ou du décodage, le caractère initialement le moins probable peut devenir plus fréquent jusqu'à dépasser la fréquence du CPP

Cela survient lorsque  $q_c > Echelle(n) - q_c$

Alors on inverse l'assignement du CPP et du CMP



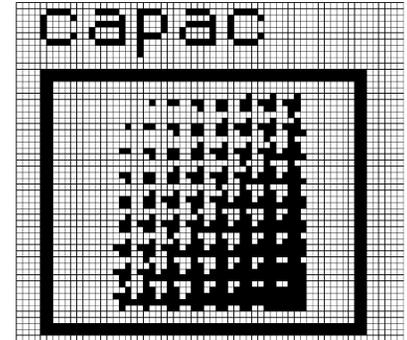
## 1.3. Image Binaires : Compression JBIG2 (2000)

---

Reprend le principe de JBIG mais en adaptant au type de contenu de l'image document

3 types de contenus sont modélisés:

- Les régions constituées de symboles
- Les régions en demie teinte contenant une image
- les régions génériques (le reste)



La norme ne propose qu'une description du décodeur

- Plusieurs codeurs sont possibles
- Laisse toutes les évolutions possibles
- On ne décrit que la façon de sauvegarder les informations

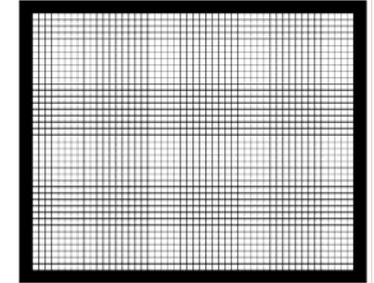
## 1.3. Image Binaires : Compression JBIG2 (2000)

---

### Codage / Décodage d'une région générique

Selon deux possibilités

1. Selon la norme fax CCITT G3 G4
2. Selon une adaptation de JBIG1



### Adaptation de JBIG et de CCITT

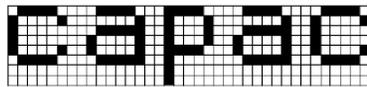
- **Si** la ligne  $n$  courante est identique à la ligne précédente **alors**  
le bit  $LNTP_n = 0$  et la ligne courante n'est pas codée
- **Sinon**  
la ligne courante est codée selon JBIG1

# 1.3. Image Binaires : Compression JBIG2 (2000)

## Codage / Décodage d'une région de symboles

### A base d'un dictionnaire de Bitmap

- Chaque bitmap d'un symbole est mémorisé dans un dictionnaire
- On ne code plus ensuite que les **positions** de ces bitmap dans l'image d'origine et **l'index** dans le dictionnaire du bitmap
- Les bitmaps de caractères sont eux-mêmes codés avec la méthode générique



Symbol	Location
c	(0, 5)
a	(8, 5)
p	(16, 7)
a	(23, 5)
c	(31, 5)

### Avec perte

- On accepte quelques différence entre bitmap d'un même caractère
- Petite taille du dico et robustesse au bruit

### Sans perte

- On crée une nouvelle entrée dans le dico dès qu'une différence survient entre les bitmaps

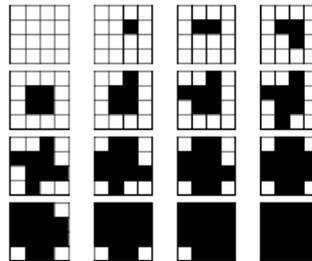
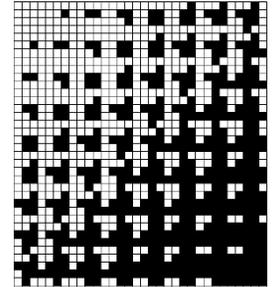
## 1.3. Image Binaires : Compression JBIG2 (2000)

---

### Codage / Décodage d'une région en demie teinte

#### A base d'un dictionnaire de Bitmap de formes élémentaires

- Les bitmaps sont de taille prédéfinie 3\*3 ou 4\*4
- Les bitmaps sont eux-mêmes codés avec la méthode générique
- Codage avec **perte** ou **sans perte** comme pour les symboles



# 1.3. Image Binaires : Compression JBIG2 (2000)

## Principes et qualité des méthodes de codage selon JBIG 2

### - Détection des trois type de régions

- Analyse automatique d'images de documents
- difficultés
- Mais les erreurs de détections ont une influence faible : la technique de codage de la région n'est pas optimisée

### - Détection des bitmaps et de leur répétition

- Mesure de Dissimilarité:

Distance Euclidienne, de Hamming, de Hausdorff etc...

$$D_{Euclidienne}(C, D) = \sqrt{n_{10} + n_{01}}$$

$$D_{Hamming}(C, D) = n_{10} + n_{01}$$

- Mesure de similarités: Corrélation ...

$$Corrélation(C, D) = \frac{n_{00}n_{11} + n_{01}n_{10}}{\sqrt{(n_{11} + n_{10})(n_{01} + n_{00}) + (n_{11} + n_{01})(n_{00} + n_{10})}}$$

- Sensible au **Seuil de regroupement !!**

# 1.3. Image Binaires : Compression JBIG2 (2000)



The skeletal, eerie remains of Hiroshima after the bomb was dropped in 1945

**Blasting Hiroshima: Why America Dropped the Bomb**  
The blasts at Hiroshima and Nagasaki still echo a half century later. Americans' initial relief at the war's end has given way to uncertainty and regret. But what did the decision look like at the time, to the men who chose to drop the bomb that summer of 1945? NEWSWEEK relives the apocalyptic ending of the most horrific war in the history of mankind, explores the American and the Japanese perspectives — and examines whether it could happen again. **Special Report: Page 18**

**GÉRARD SAINT-PAUL** 55 ans  
Selon les derniers sondages, l'UMP risque avec ses scores d'être à deux ans. La radio atteint 4,1 % d'audience nationale cumulée, et 10,1 % dans le sud de la France, notamment grâce aux tranches dirigées par le directeur de l'information.

**The Big Green Machine**  
The Greenpeace environmental ship Rainbow Warrior II sailed the Pacific last week, hoping to thwart France's plans for an underground nuclear test. But Greenpeace is no longer a giant-killing David: it's more of a multinational Goliath. **Environment: Page 16**  
Greenpeace warriors sail against the bomb

**ACTIF LVMH**  
**IER 495m<sup>2</sup>**  
**Lois 1,32**

Le numéro mondial LVMH engrange 5 milliards de francs, fruit de la vente d'un tiers de ses participations dans Guinness. Une cagnotte appréciable au moment où LVMH boucle le rachat de l'Américain Duty Free Shopper (DFS). Lasse de pâles performances de Guinness, un aile qui avait pris le contrôle de LVMH

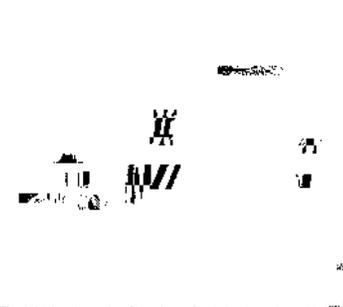
**EDF-GDF REORGANISATION SANS TENSION**  
P arons publics trouvent temps de travail contre flexibilité. Après France Télécom, mais pour un prix beaucoup plus élevé, EDF et Gaz de France ont trouvé la parade pour convaincre leurs troupes d'améliorer la productivité: un accord global sur le réajustement du temps de travail et l'emploi qui vise à réorganiser les services tout en rajoutant la pyramide des âges. Au programme, donc, l'instauration — sur la base du volontariat — d'un temps partiel à 32 heures payées 35. L'instauration chorale réduite et décalée (ôté le matin, tard le soir, ou le samedi), mais payée 38 heures. De plus, les directeurs promettront d'embaucher à terme 15 000 personnes — des jeunes — dont 75 % à temps partiel, et annonceront des départs à la retraite à 53 ans.

**PASSIF LE NOUVEAU PEL**  
L es Français ne s'y sont pas trompés. Pour continuer à profiter des plus d'épargne-logement à 5,25 % ils se sont rendus massivement dans les agences bancaires. Le taux de placement est, donc l'encas dépasse les 400 milliards de francs, vient en effet d'être abaissé à 4,25 %. Pour adoucir cette mesure, les banques ont promis d'offrir des prêts immobiliers octroyés grâce à ces nouveaux Pl à été abaissé de 5,54 à 4,80 %. Une composante peu réjouissante: seulement un tiers des souscripteurs de PEL contractent des emprunts immobiliers. Les autres profitent simplement du taux de placement.

**ACTIF LVMH**  
**IER 495m<sup>2</sup>**  
**Lois 1,32**

**EDF-GDF REORGANISATION SANS TENSION**  
P arons publics trouvent temps de travail contre flexibilité. Après France Télécom, mais pour un prix beaucoup plus élevé, EDF et Gaz de France ont trouvé la parade pour convaincre leurs troupes d'améliorer la productivité: un accord global sur le réajustement du temps de travail et l'emploi qui vise à réorganiser les services tout en rajoutant la pyramide des âges. Au programme, donc, l'instauration — sur la base du volontariat — d'un temps partiel à 32 heures payées 35. L'instauration chorale réduite et décalée (ôté le matin, tard le soir, ou le samedi), mais payée 38 heures. De plus, les directeurs promettront d'embaucher à terme 15 000 personnes — des jeunes — dont 75 % à temps partiel, et annonceront des départs à la retraite à 53 ans.

**PASSIF LE NOUVEAU PEL**  
L es Français ne s'y sont pas trompés. Pour continuer à profiter des plus d'épargne-logement à 5,25 % ils se sont rendus massivement dans les agences bancaires. Le taux de placement est, donc l'encas dépasse les 400 milliards de francs, vient en effet d'être abaissé à 4,25 %. Pour adoucir cette mesure, les banques ont promis d'offrir des prêts immobiliers octroyés grâce à ces nouveaux Pl à été abaissé de 5,54 à 4,80 %. Une composante peu réjouissante: seulement un tiers des souscripteurs de PEL contractent des emprunts immobiliers. Les autres profitent simplement du taux de placement.



The skeletal, eerie remains of Hiroshima after the bomb was dropped in 1945

**Blasting Hiroshima: Why America Dropped the Bomb**  
The blasts at Hiroshima and Nagasaki still echo a half century later. Americans' initial relief at the war's end has given way to uncertainty and regret. But what did the decision look like at the time, to the men who chose to drop the bomb that summer of 1945? NEWSWEEK relives the apocalyptic ending of the most horrific war in the history of mankind, explores the American and the Japanese perspectives — and examines whether it could happen again. **Special Report: Page 18**

**GÉRARD SAINT-PAUL** 55 ans  
Selon les derniers sondages, l'UMP risque avec ses scores d'être à deux ans. La radio atteint 4,1 % d'audience nationale cumulée, et 10,1 % dans le sud de la France, notamment grâce aux tranches dirigées par le directeur de l'information.

**The Big Green Machine**  
The Greenpeace environmental ship Rainbow Warrior II sailed the Pacific last week, hoping to thwart France's plans for an underground nuclear test. But Greenpeace is no longer a giant-killing David: it's more of a multinational Goliath. **Environment: Page 16**  
Greenpeace warriors sail against the bomb

**ACTIF LVMH**  
**IER 495m<sup>2</sup>**  
**Lois 1,32**

Le numéro mondial LVMH engrange 5 milliards de francs, fruit de la vente d'un tiers de ses participations dans Guinness. Une cagnotte appréciable au moment où LVMH boucle le rachat de l'Américain Duty Free Shopper (DFS). Lasse de pâles performances de Guinness, un aile qui avait pris le contrôle de LVMH

**EDF-GDF REORGANISATION SANS TENSION**  
P arons publics trouvent temps de travail contre flexibilité. Après France Télécom, mais pour un prix beaucoup plus élevé, EDF et Gaz de France ont trouvé la parade pour convaincre leurs troupes d'améliorer la productivité: un accord global sur le réajustement du temps de travail et l'emploi qui vise à réorganiser les services tout en rajoutant la pyramide des âges. Au programme, donc, l'instauration — sur la base du volontariat — d'un temps partiel à 32 heures payées 35. L'instauration chorale réduite et décalée (ôté le matin, tard le soir, ou le samedi), mais payée 38 heures. De plus, les directeurs promettront d'embaucher à terme 15 000 personnes — des jeunes — dont 75 % à temps partiel, et annonceront des départs à la retraite à 53 ans.

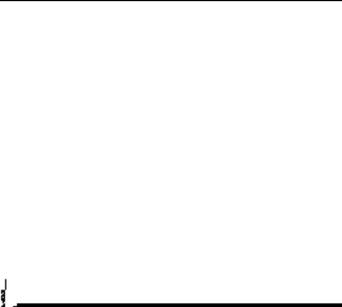
**PASSIF LE NOUVEAU PEL**  
L es Français ne s'y sont pas trompés. Pour continuer à profiter des plus d'épargne-logement à 5,25 % ils se sont rendus massivement dans les agences bancaires. Le taux de placement est, donc l'encas dépasse les 400 milliards de francs, vient en effet d'être abaissé à 4,25 %. Pour adoucir cette mesure, les banques ont promis d'offrir des prêts immobiliers octroyés grâce à ces nouveaux Pl à été abaissé de 5,54 à 4,80 %. Une composante peu réjouissante: seulement un tiers des souscripteurs de PEL contractent des emprunts immobiliers. Les autres profitent simplement du taux de placement.

**ACTIF LVMH**  
**IER 495m<sup>2</sup>**  
**Lois 1,32**

Le numéro mondial LVMH engrange 5 milliards de francs, fruit de la vente d'un tiers de ses participations dans Guinness. Une cagnotte appréciable au moment où LVMH boucle le rachat de l'Américain Duty Free Shopper (DFS). Lasse de pâles performances de Guinness, un aile qui avait pris le contrôle de LVMH

**EDF-GDF REORGANISATION SANS TENSION**  
P arons publics trouvent temps de travail contre flexibilité. Après France Télécom, mais pour un prix beaucoup plus élevé, EDF et Gaz de France ont trouvé la parade pour convaincre leurs troupes d'améliorer la productivité: un accord global sur le réajustement du temps de travail et l'emploi qui vise à réorganiser les services tout en rajoutant la pyramide des âges. Au programme, donc, l'instauration — sur la base du volontariat — d'un temps partiel à 32 heures payées 35. L'instauration chorale réduite et décalée (ôté le matin, tard le soir, ou le samedi), mais payée 38 heures. De plus, les directeurs promettront d'embaucher à terme 15 000 personnes — des jeunes — dont 75 % à temps partiel, et annonceront des départs à la retraite à 53 ans.

**PASSIF LE NOUVEAU PEL**  
L es Français ne s'y sont pas trompés. Pour continuer à profiter des plus d'épargne-logement à 5,25 % ils se sont rendus massivement dans les agences bancaires. Le taux de placement est, donc l'encas dépasse les 400 milliards de francs, vient en effet d'être abaissé à 4,25 %. Pour adoucir cette mesure, les banques ont promis d'offrir des prêts immobiliers octroyés grâce à ces nouveaux Pl à été abaissé de 5,54 à 4,80 %. Une composante peu réjouissante: seulement un tiers des souscripteurs de PEL contractent des emprunts immobiliers. Les autres profitent simplement du taux de placement.

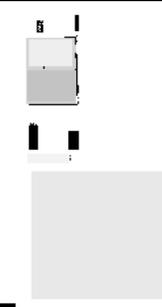


The skeletal, eerie remains of Hiroshima after the bomb was dropped in 1945

**Blasting Hiroshima: Why America Dropped the Bomb**  
The blasts at Hiroshima and Nagasaki still echo a half century later. Americans' initial relief at the war's end has given way to uncertainty and regret. But what did the decision look like at the time, to the men who chose to drop the bomb that summer of 1945? NEWSWEEK relives the apocalyptic ending of the most horrific war in the history of mankind, explores the American and the Japanese perspectives — and examines whether it could happen again. **Special Report: Page 18**

**GÉRARD SAINT-PAUL** 55 ans  
Selon les derniers sondages, l'UMP risque avec ses scores d'être à deux ans. La radio atteint 4,1 % d'audience nationale cumulée, et 10,1 % dans le sud de la France, notamment grâce aux tranches dirigées par le directeur de l'information.

**The Big Green Machine**  
The Greenpeace environmental ship Rainbow Warrior II sailed the Pacific last week, hoping to thwart France's plans for an underground nuclear test. But Greenpeace is no longer a giant-killing David: it's more of a multinational Goliath. **Environment: Page 16**  
Greenpeace warriors sail against the bomb



The skeletal, eerie remains of Hiroshima after the bomb was dropped in 1945

**Blasting Hiroshima: Why America Dropped the Bomb**  
The blasts at Hiroshima and Nagasaki still echo a half century later. Americans' initial relief at the war's end has given way to uncertainty and regret. But what did the decision look like at the time, to the men who chose to drop the bomb that summer of 1945? NEWSWEEK relives the apocalyptic ending of the most horrific war in the history of mankind, explores the American and the Japanese perspectives — and examines whether it could happen again. **Special Report: Page 18**

**GÉRARD SAINT-PAUL** 55 ans  
Selon les derniers sondages, l'UMP risque avec ses scores d'être à deux ans. La radio atteint 4,1 % d'audience nationale cumulée, et 10,1 % dans le sud de la France, notamment grâce aux tranches dirigées par le directeur de l'information.

**The Big Green Machine**  
The Greenpeace environmental ship Rainbow Warrior II sailed the Pacific last week, hoping to thwart France's plans for an underground nuclear test. But Greenpeace is no longer a giant-killing David: it's more of a multinational Goliath. **Environment: Page 16**  
Greenpeace warriors sail against the bomb



The skeletal, eerie remains of Hiroshima after the bomb was dropped in 1945

**Blasting Hiroshima: Why America Dropped the Bomb**  
The blasts at Hiroshima and Nagasaki still echo a half century later. Americans' initial relief at the war's end has given way to uncertainty and regret. But what did the decision look like at the time, to the men who chose to drop the bomb that summer of 1945? NEWSWEEK relives the apocalyptic ending of the most horrific war in the history of mankind, explores the American and the Japanese perspectives — and examines whether it could happen again. **Special Report: Page 18**

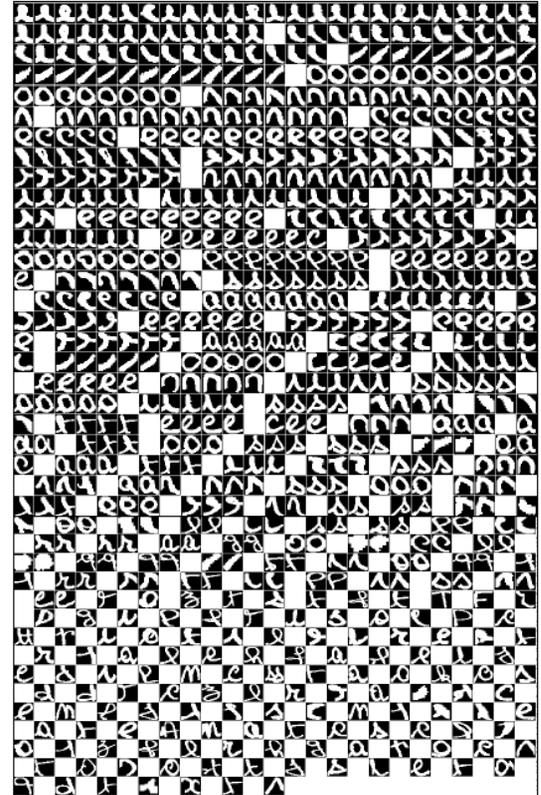
**GÉRARD SAINT-PAUL** 55 ans  
Selon les derniers sondages, l'UMP risque avec ses scores d'être à deux ans. La radio atteint 4,1 % d'audience nationale cumulée, et 10,1 % dans le sud de la France, notamment grâce aux tranches dirigées par le directeur de l'information.

**The Big Green Machine**  
The Greenpeace environmental ship Rainbow Warrior II sailed the Pacific last week, hoping to thwart France's plans for an underground nuclear test. But Greenpeace is no longer a giant-killing David: it's more of a multinational Goliath. **Environment: Page 16**  
Greenpeace warriors sail against the bomb

# 1.3. Image Binaires : Compression JBIG2 (2000)

---

Illustration de distances entre bitmaps



## 2. Images en niveaux de gris: Compression par plans

---

**Principe:**

**-Compresser individuellement les n plans d'une image représentée sur 2<sup>n</sup> Niveaux de Gris**

**- La compression ne sera efficace que si les niveaux de gris voisins ont une représentation binaire proche:**

$$7=0111_2$$

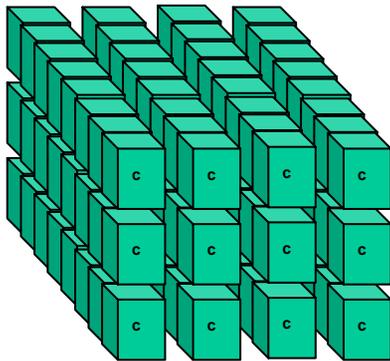
$$8=1000_2$$

dans ce cas les plans sont tous différents lorsqu'on passe du niveau 7 à 8

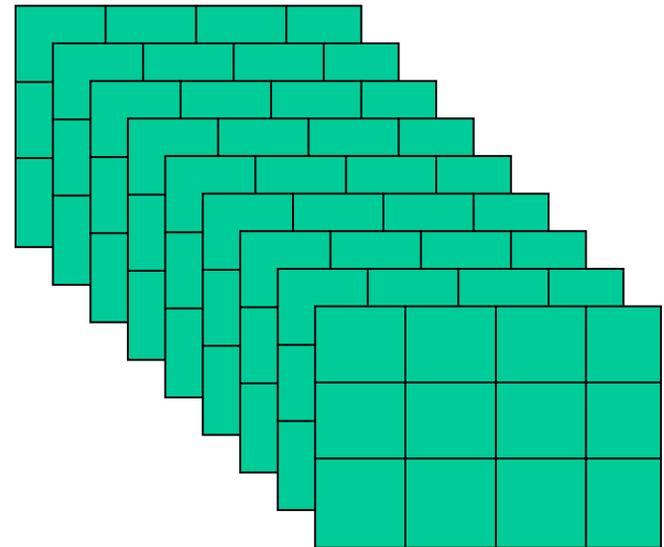
**- Solution: Utilisation du code Gray pour coder les pixels**

# Images en niveaux de gris: Compression par plans

---



12 pixels de 8 bits



8 plans binaires de 12 pixels

## Compression par plans (2)

---

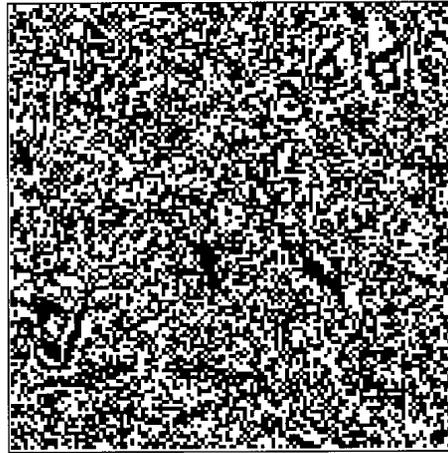
### Exemple de Code Gray sur 5 bits:

<u>43210</u>	<u>Gray</u>	<u>43210</u>	<u>Gray</u>	<u>43210</u>	<u>Gray</u>	<u>43210</u>	<u>Gray</u>
00000	00000	<b>01000</b>	10010	<b>10000</b>	00011	<b>11000</b>	10001
00001	00100	<b>01001</b>	10110	<b>10001</b>	00111	<b>11001</b>	10101
00010	01100	<b>01010</b>	11110	<b>10010</b>	01111	<b>11010</b>	11101
00011	01000	<b>01011</b>	11010	<b>10011</b>	01011	<b>11011</b>	11001
00100	11000	<b>01100</b>	01010	<b>10100</b>	11011	<b>11100</b>	01001
00101	11100	<b>01101</b>	01110	<b>10101</b>	11111	<b>11101</b>	01101
00110	10100	<b>01110</b>	00110	<b>10110</b>	10111	<b>11110</b>	00101
00111	10000	<b>01111</b>	00010	<b>10111</b>	10011	<b>11111</b>	00001

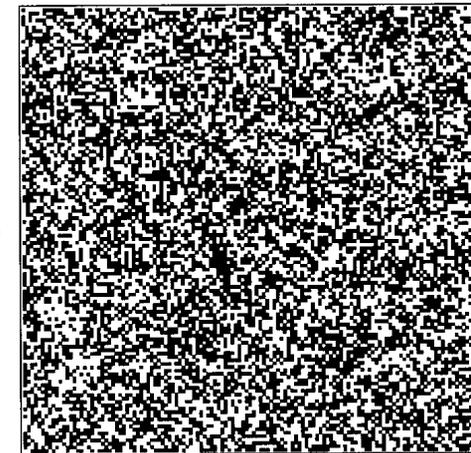
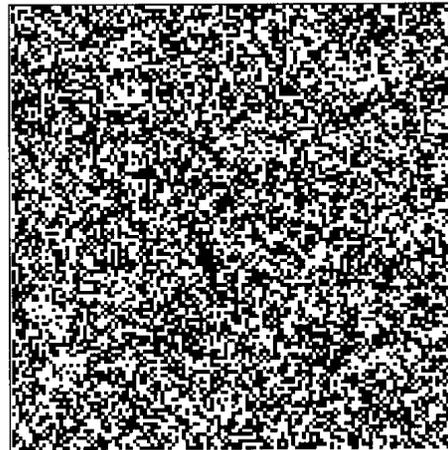
# Compression par plans (3)

Code Binaire

Code Gray



(2)



(1)

Plan 5



(5)



Plan 4



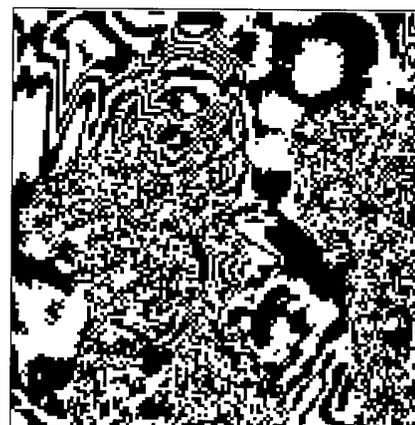
(4)



Plan 3



(3)



# Compression avec perte

## Quantifier la perte

Erreur quadratique moyenne (Mean Square Error)

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{x,y} (I(x,y) - Ic(x,y))^2$$

Puissance de l'image

$$P = \frac{1}{n} \sum_{x,y} I(x,y)^2$$

Rapport Signal sur Bruit

$$SNR = 10 \text{Log}_{10} \left( \frac{P}{MSE} \right)$$

Rapport Signal de crête sur Bruit  
(Peak Signal to Noise Ratio)

$$PSNR = 20 \text{Log}_{10} \left( \frac{\max_{x,y} I(x,y)}{RMSE} \right)$$

## Valeurs numériques et rendu visuel

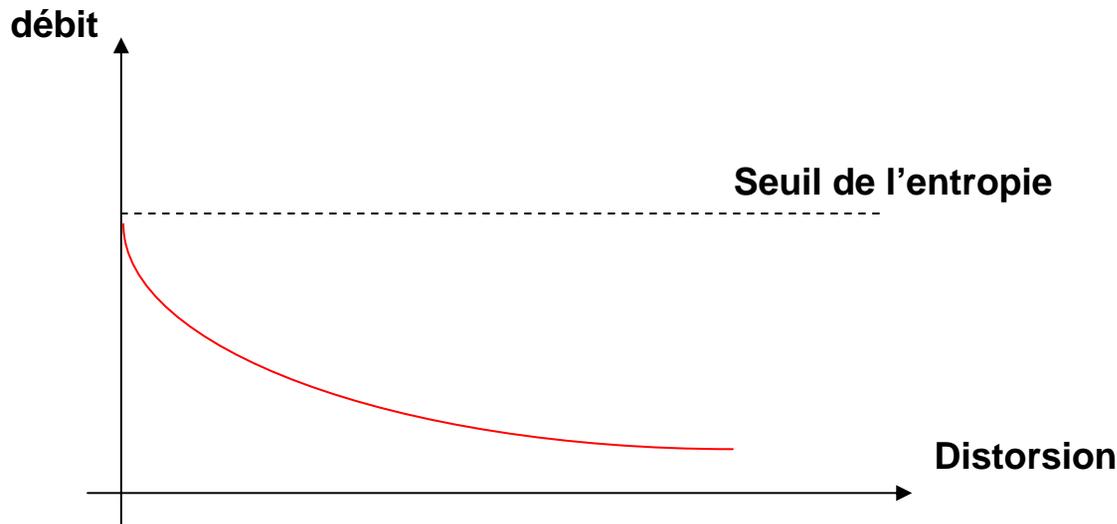
Permet une comparaison, pas une mesure absolue

# 4. Compression avec perte

## La courbe Débit / Distorsion

Pour une source donnée, le nombre moyen de bits nécessaires au codage (Le Débit = Inverse du taux de compression) peut baisser sans perte d'information jusqu'à la limite théorique de l'entropie de Shannon.

Au-delà de cette limite, le taux de distorsion de la représentation codée par rapport à la représentation d'origine croit de manière exponentielle



# Compression par Transformée

---

**Passer dans une représentation pour laquelle les valeurs des pixels sont décorréélées.**

**Il y a compression possible si la nouvelle représentation se décompose en moyenne sur des valeurs faibles.**

**Il y a perte si on effectue une quantification de la Transformée**

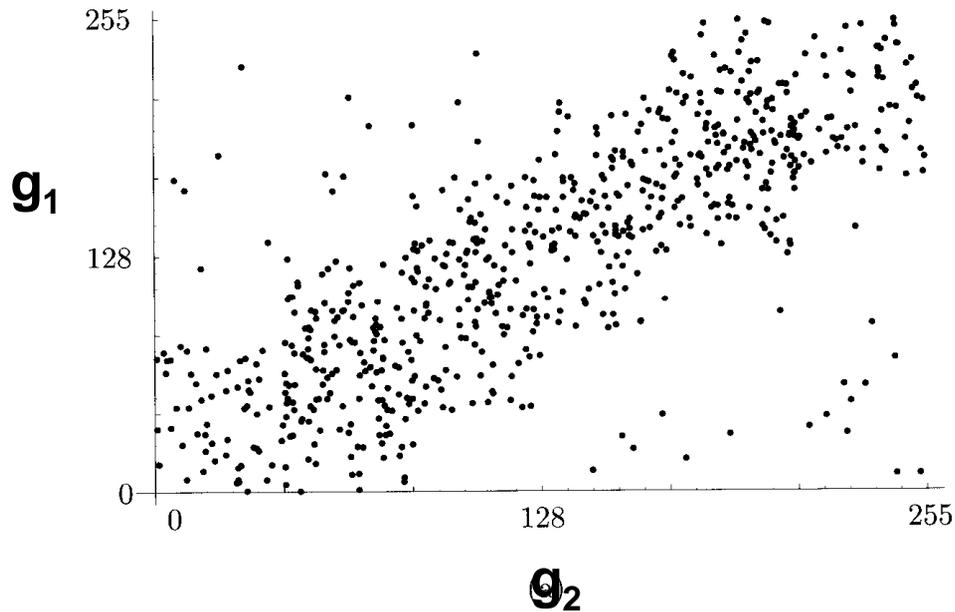
# Compression par Transformée (2)

## Corrélation Spatiale

Les pixels voisins ont des NG proches

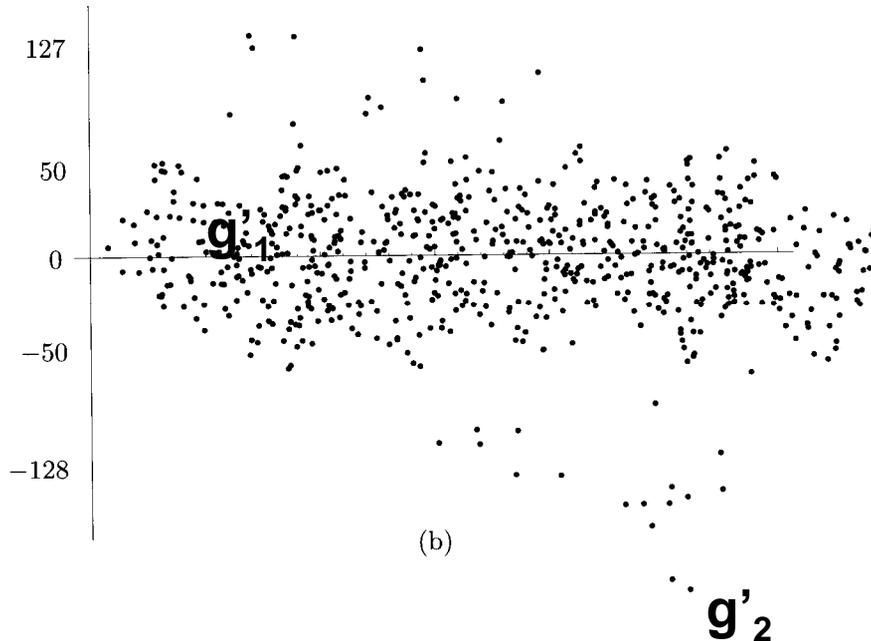
Si on examine deux voisins de niveau de gris  $g_1$  et  $g_2$   
on remarque une répartition autour de la diagonale

$$g_1 = \alpha g_2 + \beta$$



# Compression par Transformée (3)

Une rotation de la représentation de 45° permet de diminuer le domaine de variation de l'ordonnée



$$(g'_1 \ g'_2) = (g_1 \ g_2) \begin{pmatrix} \cos 45 & -\sin 45 \\ \sin 45 & \cos 45 \end{pmatrix} = (g'_1 \ g'_2) R$$

On peut quantifier  $g'_1$  différemment de  $g'_2$

On peut étendre ce principe à des triplets de points ...

... à des blocs de 8\*8 pixels points (cas de JPEG)

# Compression par Transformée (4)

## Transformées Orthogonales

On étend le principe à n pixels: exemple n=4

W est la matrice de transformation

Le nouveau NG  $C_i$  dépend des NG des 4 pixels  $d_j$

$C_i$  représente la corrélation du vecteur  $W_i$  avec le vecteur D

$$W_i = (w_{i1} \ w_{i2} \ w_{i3} \ w_{i4})$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} \quad C = W * D$$

$$C_i = \sum_j w_{ij} d_j$$

$$D = (d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4) \text{ les 4 pixels initiaux}$$

C'est un produit scalaire: les valeurs nulles désignent des vecteurs orthogonaux

On cherche une transformation qui attribue à C1 une grande valeur et de faibles valeurs à C2,C3,C4...

D'après la relation de base

$C_i$  sera grand si les  $w_{ij}$  sont grands et de même signe que  $d_j$

$C_i$  sera faible si les  $w_{ij}$  sont faibles et la moitié d'entre eux sont du signe de  $d_j$

# Compression par Transformée (5)

## Choix des vecteurs $W_i$

- Ils doivent être les plus différents possible entre eux: Orthogonaux
  - si tous les vecteurs de  $W$  sont orthogonaux entre eux on dit que la transformation est orthogonale
  - dans ce cas la transformée inverse est définie par la transposée de  $W$
- $W_1$  doit contenir des valeurs positives
- Les autres  $W_i$  doivent contenir des signes alternés

Exemple: Transformation de Walsh-Hadamard

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad W^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Énergie initiale} = 81 \\ \text{Énergie transformé} = 324 \\ \text{Normalisation } 324/4 \end{array} \quad \frac{W}{2}^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 3/2 \\ -5/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

89% de l'énergie est concentrée sur la première composante de la transformée

La transformée inverse est définie par  $W$  et permet de reconstruire le voisinage initial

$$\left(\frac{W}{2}\right)^t * (17 \quad 3 \quad -5 \quad 1)^t = (4 \quad 6 \quad 5 \quad 2)^t$$

# Transformées Bi-Dimensionnelles

(cas séparable)

## Exemple

données initiales

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

### 1- Transformée Mono-Dimensionnelle (de chaque colonne de D)

$$C = \frac{W}{2} * D = \begin{pmatrix} 8.5 & 11.5 & 10.5 & 15 \\ 1.5 & 3.5 & -1.5 & 0 \\ -2.5 & -0.5 & 0.5 & 3 \\ 0.5 & -0.5 & 2.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Les colonnes ont même énergie  
concentrée sur la première ligne

### 2- Transformée Mono-Dimensionnelle de chaque ligne de C

$$C' = C * \frac{W^t}{2} = \frac{W}{2} * D * \frac{W^t}{2} = \begin{pmatrix} 22.75 & -2.75 & 0.75 & -3.75 \\ 1.75 & 3.25 & -0.25 & -1.75 \\ 0.25 & -3.25 & 0.25 & -2.25 \\ 1.25 & -1.25 & -0.75 & 1.75 \end{pmatrix}$$

L'énergie est concentrée sur l'élément de la première ligne première colonne

# Transformée en Cosinus Discret (DCT)

## Cas Mono-Dimensionnel

On prend pour vecteurs de la décomposition 8 fonctions cosinus

$$\cos(f\theta) \text{ avec } f \in [0, 1, 2, 3, 4, 4, 6, 7]$$

On les échantillonne pour les 8 valeurs

$$\theta = \frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}, \frac{15\pi}{16}$$

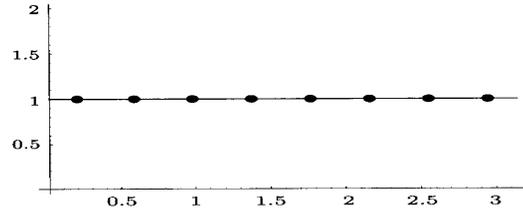
Les huit valeurs de chaque cosinus forment un vecteur, les huit vecteurs sont orthogonaux

$\theta$	0.196	0.589	0.982	1.374	1.767	2.160	2.553	2.945	
cos 0 $\theta$	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	<b>v0</b>
cos 1 $\theta$	0.981	0.831	0.556	0.195	-0.195	-0.556	-0.831	-0.981	<b>v1</b>
cos 2 $\theta$	0.924	0.383	-0.383	-0.924	-0.924	-0.383	0.383	0.924	<b>v2</b>
cos 3 $\theta$	0.831	-0.195	-0.981	-0.556	0.556	0.981	0.195	-0.831	<b>v3</b>
cos 4 $\theta$	0.707	-0.707	-0.707	0.707	0.707	-0.707	-0.707	0.707	<b>v4</b>
cos 5 $\theta$	0.556	-0.981	0.195	0.831	-0.831	-0.195	0.981	-0.556	<b>v5</b>
cos 6 $\theta$	0.383	-0.924	0.924	-0.383	-0.383	0.924	-0.924	0.383	<b>v6</b>
cos 7 $\theta$	0.195	-0.556	0.831	-0.981	0.981	-0.831	0.556	-0.195	<b>v7</b>

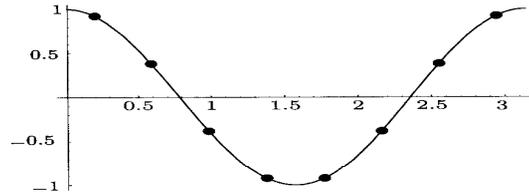
# DCT (2)

f

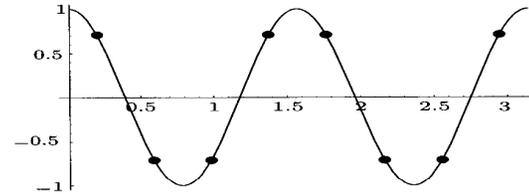
0



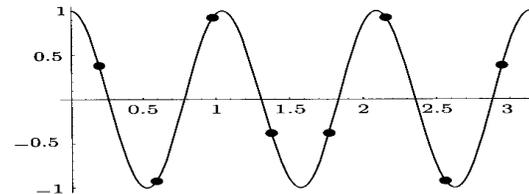
2



4

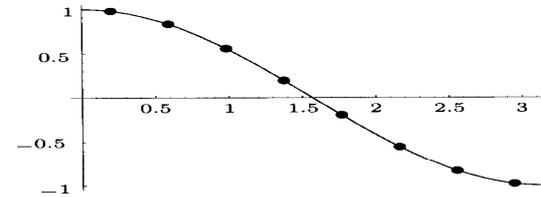


6

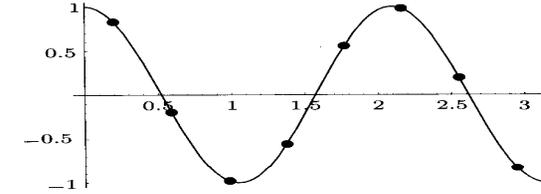


f

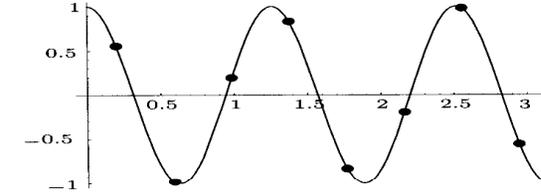
1



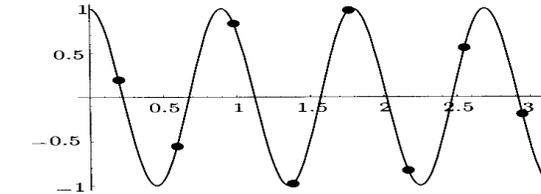
3



5



7



## DCT (3)

On peut décomposer de manière unique tous vecteurs de huit valeurs selon la base des  $v_i$

$$p=(0.6,0.5,0.4,0.5,0.6,0.5,0.4,0.55)$$

$$p=0.506v_0+0.0143v_1+0.0115v_2+0.0439v_3+0.0795v_4-0.0432v_5+0.00478v_6-0.0077v_7$$

Calcul direct de la DCT

$$G_f = C_f \sum_{t=0}^7 p_t \cos\left(\frac{(2t+1)f\pi}{16}\right)$$

avec

$$C_f = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & f=0 \\ 1, & f>0 \end{cases}$$

Calcul inverse

$$p_t = \sum_{f=0}^7 C_f G_f \cos\left(\frac{(2t+1)f\pi}{16}\right)$$

# DCT (4)

---

## Exemple:

$p=(12, 10, 8, 10, 12, 10, 8, 11)$  donne  
(28.6375, 0.571202, 0.46194, 1.757, 3.18198, -1.72956, 0.191342, -0.308709)

Si on quantifie les coefficients avec moins de précision  
(28.6, 0.6, 0.5, 1.8, 3.2, -1.8, 0.2, -0.3)

La transformée inverse donne

$p=(12.1883, 10.2315, 7.74931, 9.20863, 11.7876, 9.54549, 7.82865, 10.6557)$

Si on quantifie les coefficients sur des valeur entières

(28, 0, 0, 2, 3, -2, 0, 0)

La transformée inverse donne

$p=(11.236, 9.62443, 7.66286, 9.57302, 12.3471, 10.0146, 8.05304, 10.6842)$

# DCT (5)

## Cas bi-dimensionnel

pour un carré de  $n*n$  pixels on calcul les coefficients de la DCT par

$$G_{f_h f_h} = C_{f_h} C_{f_v} \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-1} p_{xy} \cos\left(\frac{(2y+1)f_v \pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{(2x+1)f_h \pi}{2n}\right)$$

La reconstruction de chaque bloc se par DCT inverse selon la formule

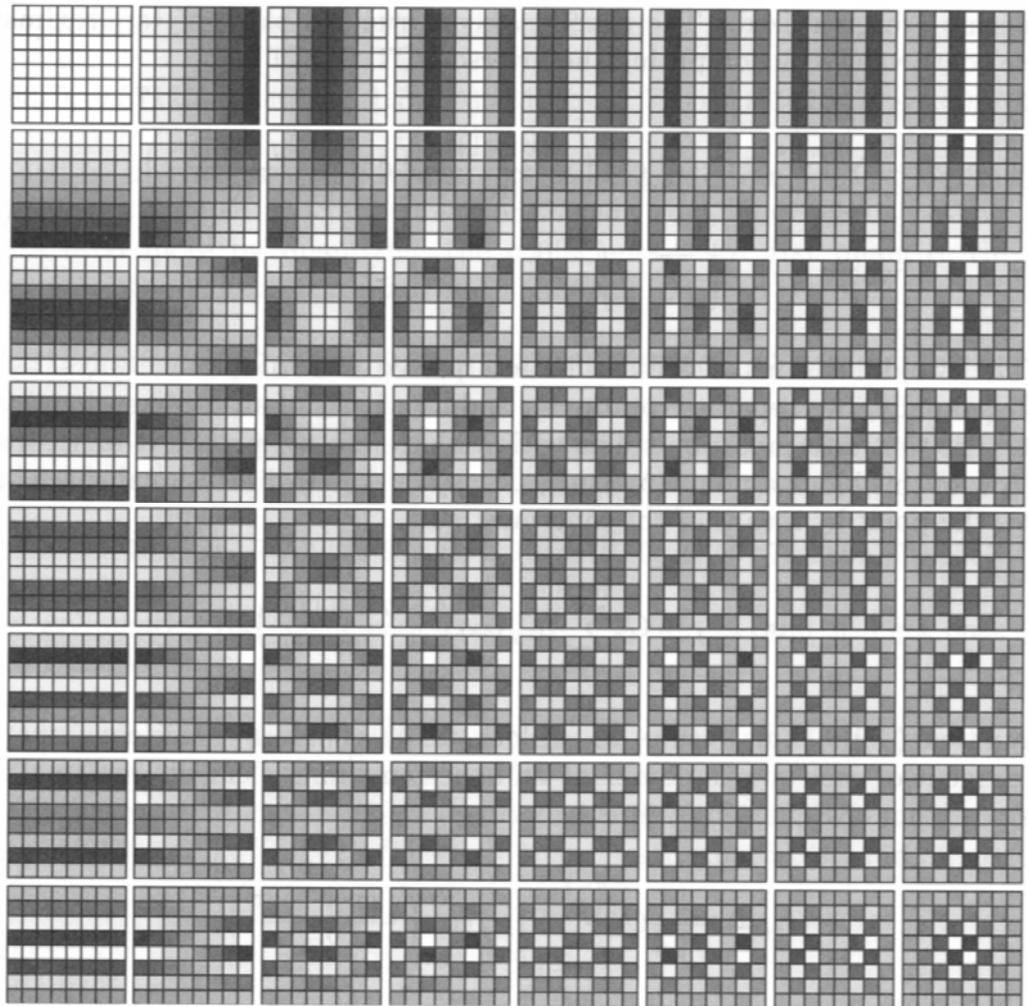
$$p_{xy} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} C_{f_h} C_{f_v} G_{f_h f_v} \cos\left(\frac{(2y+1)f_v \pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{(2x+1)f_h \pi}{2n}\right)$$

avec 
$$C_f = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, f=0 \\ 1, f>0 \end{cases}$$

En général  $n=8$

on décompose chaque bloc de 64 pixels sur une base de 64 images de taille  $8*8$

# DCT (6)



# DCT (7)

## Exemple

12	10	8	10	12	10	8	11	81	0	0	0	0	0	0	0	0
11	12	10	8	10	12	10	8	0	1.57	0.61	1.90	0.38	-1.81	0.20	-0.32	
8	11	12	10	8	10	12	10	0	-0.61	0.71	0.35	0	0.07	0	0.02	
10	8	11	12	10	8	10	12	0	1.90	-0.35	4.76	0.77	-3.39	0.25	-0.54	
12	10	8	11	12	10	8	10	0	-0.38	0	-0.77	8.00	0.51	0	0.07	
10	12	10	8	11	12	10	8	0	-1.81	-0.07	-3.39	-0.51	1.57	0.56	0.25	
8	10	12	10	8	11	12	10	0	-0.20	0	-0.25	0	-0.56	-0.71	0.29	
10	8	10	12	10	8	11	12	0	-0.32	-0.02	-0.54	-0.07	0.25	-0.29	-0.90	

8	10	9	11	11	9	9	12	79.12	0.98	0.64	-1.51	-0.62	-0.86	1.22	0.32	
11	8	12	8	11	10	11	10	0.15	-1.64	-0.09	1.23	0.10	3.29	1.08	-2.97	
9	11	9	10	12	9	9	8	-1.26	-0.29	-3.27	1.69	-0.51	1.13	1.52	1.33	
9	12	10	8	8	9	8	9	-1.27	-0.25	-0.67	-0.15	1.63	-1.94	0.47	-1.30	
12	8	9	9	12	10	8	11	-2.12	-0.67	-0.07	-0.79	0.13	-1.40	0.16	-0.15	
8	11	10	12	9	12	12	10	-2.68	1.08	-1.99	-1.93	-1.77	-0.35	0	-0.80	
10	10	12	10	12	10	10	12	1.20	2.10	-0.98	0.87	-1.55	-0.59	-0.98	2.76	
12	9	11	11	9	8	8	12	-2.24	0.55	0.29	0.75	-2.40	-0.05	0.06	1.14	

# JPEG (1)

---

## Principe d'une compression par DCT

- 1- Décomposer l'image en  $k$  blocs de  $8*8$  pixels
- 2- Appliquer la DCT 2D sur chaque bloc. On obtient pour le bloc  $j$

64 coefficients  $w_j^{(i)}, i=0...63$

$w_j^{(0)}$  est le coefficient DC les 63 autres sont les coefficients AC

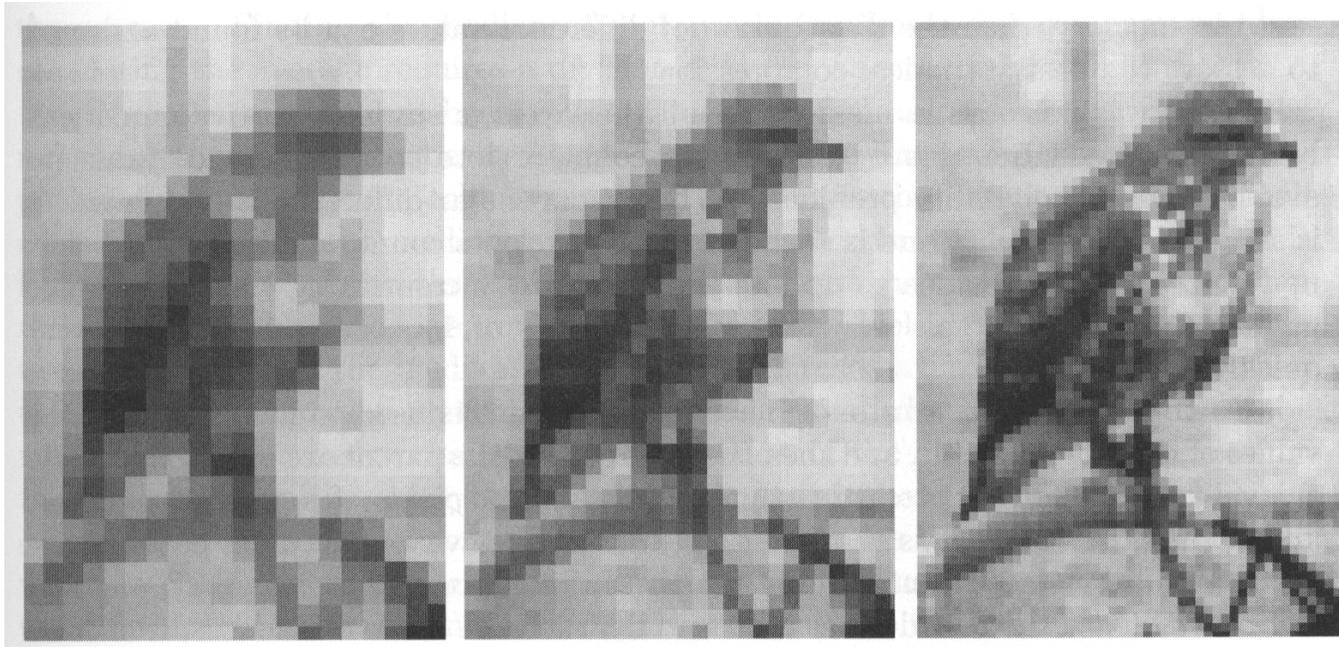
- 3- Les  $k$  Transformées sont organisées en 64 vecteurs de coefficients  $C_j$  rangés dans le sens d'un parcours en zigzag

$C_0$  contient les  $k$  coefficients DC ...

- 4- Quantifier séparément les  $k$  coefficients de rang  $j$  et les écrire dans le fichier compressé

## JPEG (2): Compression progressive

---



# JPEG (3): Ordre de parcours des coefficients

---

0	1	5	6	14	15	27	28
2	4	7	13	16	26	29	42
3	8	12	17	25	30	41	43
9	11	18	24	31	40	44	53
10	19	23	32	39	45	52	54
20	22	33	38	46	51	55	60
21	34	37	47	50	56	59	61
35	36	48	49	57	58	62	63

# JPEG (4) : Quantification des Coefficients

## Les 64 coefficients sont quantifiés (avec perte)

- le pas de quantification est précisé dans la norme
- il est différent pour chaque coefficient AC

$$A_{ij} = \text{round}(G_{ij} / Q_{ij})$$

## Tables de quantification JPEG

Niveaux de Gris								Couleur							
16	11	10	16	24	40	51	61	17	18	24	47	99	99	99	99
12	12	14	19	26	58	60	55	18	21	26	66	99	99	99	99
14	13	16	24	40	57	69	56	24	26	56	99	99	99	99	99
14	17	22	29	51	87	80	62	47	66	99	99	99	99	99	99
18	22	37	56	68	109	103	77	99	99	99	99	99	99	99	99
24	35	55	64	81	104	113	92	99	99	99	99	99	99	99	99
49	64	78	87	103	121	120	101	99	99	99	99	99	99	99	99
72	92	95	98	112	100	103	99	99	99	99	99	99	99	99	99

Luminance

Chrominance

# JPEG (5) : Codage après quantification

## Codage des coefficients DC

- ils varient peu entre blocs adjacents
- on utilise un codage différentiel

1118, 1114, 1119,...



1118, - 4, +5, ...

- puis un codage d'Huffman du résultat selon le tableau ci-après

La ligne  $i$  contient les entiers compris dans l'intervalle  $\left[-(2^i - 1), +(2^i - 1)\right]$

Non compris les entiers de la ligne  $i-1$   $\left[-(2^{i-1} - 1), +(2^{i-1} - 1)\right]$

Range	DC Difference Category	AC Category
0	0	N/A
-1, 1	1	1
-3, -2, 2, 3	2	2
-7, ..., -4, 4, ..., 7	3	3
-15, ..., -8, 8, ..., 15	4	4
-31, ..., -16, 16, ..., 31	5	5
-63, ..., -32, 32, ..., 63	6	6
-127, ..., -64, 64, ..., 127	7	7
-255, ..., -128, 128, ..., 255	8	8
-511, ..., -256, 256, ..., 511	9	9
-1023, ..., -512, 512, ..., 1023	A	A
-2047, ..., -1024, 1024, ..., 2047	B	B
-4095, ..., -2048, 2048, ..., 4095	C	C
-8191, ..., -4096, 4096, ..., 8191	D	D
-16383, ..., -8192, 8192, ..., 16383	E	E
-32767, ..., -16384, 16384, ..., 32767	F	N/A

# Codage des Coefficients DC

Range	DC Difference Category	AC Category
0	0	N/A
-1, 1	1	1
-3, -2, 2, 3	2	2
-7, ..., -4, 4, ..., 7	3	3
-15, ..., -8, 8, ..., 15	4	4
-31, ..., -16, 16, ..., 31	5	5
-63, ..., -32, 32, ..., 63	6	6
-127, ..., -64, 64, ..., 127	7	7
-255, ..., -128, 128, ..., 255	8	8
-511, ..., -256, 256, ..., 511	9	9
-1023, ..., -512, 512, ..., 1023	A	A
-2047, ..., -1024, 1024, ..., 2047	B	B
-4095, ..., -2048, 2048, ..., 4095	C	C
-8191, ..., -4096, 4096, ..., 8191	D	D
-16383, ..., -8192, 8192, ..., 16383	E	E
-32767, ..., -16384, 16384, ..., 32767	F	N/A

Category	Base Code	Length	Category	Base Code	Length
0	010	3	6	1110	10
1	011	4	7	11110	12
2	100	5	8	111110	14
3	00	5	9	1111110	16
4	101	7	A	11111110	18
5	110	8	B	111111110	20

1118, 1114, 1119, ...



1118, - 4, +5, ...

$$1118 = 2^{11} - 930$$

apparaît sur la ligne 11 qui correspond à la catégorie B

1118 apparaît sur la **colonne 1118 ligne 11**

1118 est codé par le code d'Huffman de la ligne B (111111110)

suivi du code binaire de 1118 (10001011110)

1118 111111110 | 10001011110

# Codage des Coefficients DC

Range	DC Difference Category	AC Category
0	0	N/A
-1, 1	1	1
-3, -2, 2, 3	2	2
-7, ..., -4, 4, ..., 7	3	3
-15, ..., -8, 8, ..., 15	4	4
-31, ..., -16, 16, ..., 31	5	5
-63, ..., -32, 32, ..., 63	6	6
-127, ..., -64, 64, ..., 127	7	7
-255, ..., -128, 128, ..., 255	8	8
-511, ..., -256, 256, ..., 511	9	9
-1023, ..., -512, 512, ..., 1023	A	A
-2047, ..., -1024, 1024, ..., 2047	B	B
-4095, ..., -2048, 2048, ..., 4095	C	C
-8191, ..., -4096, 4096, ..., 8191	D	D
-16383, ..., -8192, 8192, ..., 16383	E	E
-32767, ..., -16384, 16384, ..., 32767	F	N/A

Category	Base Code	Length	Category	Base Code	Length
0	010	3	6	1110	10
1	011	4	7	11110	12
2	100	5	8	111110	14
3	00	5	9	1111110	16
4	101	7	A	11111110	18
5	110	8	B	111111110	20

1118, 1114, 1119,...



1118, - 4, +5, ...

## Codage des différences sur les autres coefficients DC

- 4 est sur la catégorie 3 colonne 3 du tableau (colonne débute à zéro)

- 4 00 | 011

Total du code sur 5 bits

# Codage des coefficients AC

---

## Combinaison d'un codage RLE et Huffman

il y a beaucoup de zéros

1. on code les coefficients non nuls selon le tableau des coefficient DC  
on trouve la **catégorie** du coefficient non nul
2. pour chaque coefficient non nul on détermine la longueur du **RUN** de zéros le précédant
3. on détermine le code du couple (**Catégorie, Run**) selon le tableau ci-après
4. On code enfin les bits les moins significatif de la valeur non nulle selon le tableau des coefficients DC

Exemple: - 3 (premier coefficient AC)

Catégorie 2 précédé par aucune valeur nulle    donc codé    01

- 3 est sur la première colonne de la catégorie    donc codé    00

Enfinement le premier coefficient AC – 3 est codé **0100**

# Codage des coefficients AC

Exemple: - 3 (premier coefficient AC)

Catégorie 2 précédé par aucune valeur nulle

donc codé 01

- 3 est sur la première colonne de la catégorie

donc codé 00

Finalement le premier coefficient AC – 3 est codé **0100**

Range	DC Difference Category	AC Category
0	0	N/A
-1, 1	1	1
-3, -2, 2, 3	2	2
-7, ..., -4, 4, ..., 7	3	3
-15, ..., -8, 8, ..., 15	4	4
-31, ..., -16, 16, ..., 31	5	5
-63, ..., -32, 32, ..., 63	6	6
-127, ..., -64, 64, ..., 127	7	7
-255, ..., -128, 128, ..., 255	8	8
-511, ..., -256, 256, ..., 511	9	9
-1023, ..., -512, 512, ..., 1023	A	A
-2047, ..., -1024, 1024, ..., 2047	B	B
-4095, ..., -2048, 2048, ..., 4095	C	C
-8191, ..., -4096, 4096, ..., 8191	D	D
-16383, ..., -8192, 8192, ..., 16383	E	E
-32767, ..., -16384, 16384, ..., 32767	F	N/A

Run/Category	Base Code	Length	Run/Category	Base Code	Length
0/0	1010 (= EOB)	4			
0/1	00	3	8/1	11111010	9
0/2	01	4	8/2	11111111000000	17
0/3	100	6	8/3	111111110110111	19
0/4	1011	8	8/4	111111110111000	20
0/5	11010	10	8/5	111111110111001	21
0/6	111000	12	8/6	111111110111010	22
0/7	1111000	14	8/7	111111110111011	23
0/8	111110110	18	8/8	111111110111100	24
0/9	11111111000010	25	8/9	111111110111101	25
0/A	111111110000011	26	8/A	111111110111110	26
1/1	1100	5	9/1	111111000	10
1/2	111001	8	9/2	111111110111111	18
1/3	1111001	10	9/3	111111111000000	19
1/4	111110110	13	9/4	111111110000001	20
1/5	11111110110	16	9/5	111111110000100	21
1/6	111111110000100	22	9/6	111111110000101	22
1/7	111111110000101	23	9/7	111111110000100	23
1/8	111111110000110	24	9/8	111111110000101	24
1/9	111111110000111	25	9/9	111111110000110	25
1/A	1111111100001000	26	9/A	111111110000111	26
2/1	11011	6	A/1	111111001	10
2/2	11111000	10	A/2	11111111001000	18
2/3	1111110111	13	A/3	11111111001001	19
2/4	111111110001001	20	A/4	11111111001010	20
2/5	111111110001010	21	A/5	11111111001011	21
2/6	111111110001011	22	A/6	11111111001100	22
2/7	111111110001100	23	A/7	11111111001101	23
2/8	111111110001101	24	A/8	11111111001110	24
2/9	111111110001110	25	A/9	11111111001111	25
2/A	111111110001111	26	A/A	11111111010000	26
3/1	111010	7	B/1	111111010	10
3/2	111110111	11	B/2	11111111010001	18
3/3	1111110111	14	B/3	11111111010010	19
3/4	111111110010000	20	B/4	11111111010011	20
3/5	111111110010001	21	B/5	11111111010100	21
3/6	111111110010010	22	B/6	11111111010101	22
3/7	111111110010011	23	B/7	11111111010110	23
3/8	111111110010100	24	B/8	11111111010111	24
3/9	111111110010101	25	B/9	11111111011000	25
3/A	111111110010110	26	B/A	11111111011001	26

# Codage des coefficients AC

Run/Category	Base Code	Length	Run/Category	Base Code	Length
0/0	1010 (= EOB)	4			
0/1	00	3	8/1	11111010	9
0/2	01	4	8/2	11111111000000	17
0/3	100	6	8/3	111111110110111	19
0/4	1011	8	8/4	111111110111000	20
0/5	11010	10	8/5	111111110111001	21
0/6	111000	12	8/6	111111110111010	22
0/7	1111000	14	8/7	111111110111011	23
0/8	1111110110	18	8/8	111111110111100	24
0/9	11111111000010	25	8/9	111111110111101	25
0/A	111111110000011	26	8/A	111111110111110	26
1/1	1100	5	9/1	111111000	10
1/2	111001	8	9/2	111111110111111	18
1/3	1111001	10	9/3	11111111000000	19
1/4	111110110	13	9/4	11111111000001	20
1/5	11111110110	16	9/5	11111111000010	21
1/6	111111110000100	22	9/6	11111111000011	22
1/7	1111111110000101	23	9/7	111111110000100	23
1/8	1111111110000110	24	9/8	111111110000101	24
1/9	1111111110000111	25	9/9	111111110000110	25
1/A	1111111110001000	26	9/A	111111111000111	26
2/1	11011	6	A/1	111111001	10
2/2	1111000	10	A/2	11111111001000	18
2/3	111110111	13	A/3	11111111001001	19
2/4	111111110001001	20	A/4	11111111001010	20
2/5	111111110001010	21	A/5	11111111001011	21
2/6	111111110001011	22	A/6	11111111001100	22
2/7	111111110001100	23	A/7	11111111001101	23
2/8	111111110001101	24	A/8	11111111001110	24
2/9	111111110001110	25	A/9	11111111001111	25
2/A	111111110001111	26	A/A	11111111010000	26
3/1	111010	7	B/1	111111010	10
3/2	11110111	11	B/2	111111111010001	18
3/3	1111110111	14	B/3	111111111010010	19
3/4	111111110010000	20	B/4	111111111010011	20
3/5	111111110010001	21	B/5	111111111010100	21
3/6	111111110010010	22	B/6	111111111010101	22
3/7	111111110010011	23	B/7	111111111010110	23
3/8	111111110010100	24	B/8	111111111010111	24
3/9	111111110010101	25	B/9	111111111011000	25
3/A	111111110010110	26	B/A	111111111011001	26
4/1	111011	7	C/1	1111111010	11
4/2	111111000	12	C/2	111111111011010	18
4/3	111111110010111	19	C/3	111111111011011	19
4/4	111111110011000	20	C/4	111111111011100	20
4/5	111111110011001	21	C/5	111111111011101	21
4/6	111111110011010	22	C/6	111111111011110	22
4/7	111111110011011	23	C/7	111111111011111	23
4/8	111111110011100	24	C/8	111111111100000	24
4/9	111111110011101	25	C/9	111111111100001	25
4/A	111111110011110	26	C/A	111111111100010	26

Run/Category	Base Code	Length	Run/Category	Base Code	Length
5/1	1111010	8	D/1	11111111010	12
5/2	111111001	12	D/2	11111111100011	18
5/3	111111110011111	19	D/3	111111111100100	19
5/4	1111111110100000	20	D/4	111111111100101	20
5/5	1111111110100001	21	D/5	111111111100110	21
5/6	1111111110100010	22	D/6	111111111100111	22
5/7	1111111110100011	23	D/7	111111111101000	23
5/8	1111111110100100	24	D/8	111111111101001	24
5/9	1111111110100101	25	D/9	111111111101010	25
5/A	1111111110100110	26	D/A	111111111101011	26
6/1	1111011	8	E/1	111111110110	13
6/2	1111111000	13	E/2	11111111101100	18
6/3	111111110100111	19	E/3	111111111101101	19
6/4	111111110101000	20	E/4	111111111101110	20
6/5	111111110101001	21	E/5	111111111101111	21
6/6	111111110101010	22	E/6	111111111101000	22
6/7	111111110101011	23	E/7	111111111101001	23
6/8	111111110101100	24	E/8	111111111101010	24
6/9	111111110101101	25	E/9	111111111101011	25
6/A	111111110101110	26	E/A	111111111101010	26
7/1	11111001	9	F/0	11111110111	12
7/2	11111111001	13	F/1	11111111110101	17
7/3	1111111110101111	19	F/2	111111111101110	18
7/4	1111111110110000	20	F/3	111111111101111	19
7/5	1111111110110001	21	F/4	111111111101100	20
7/6	1111111110110010	22	F/5	111111111101101	21
7/7	1111111110110011	23	F/6	111111111101100	22
7/8	1111111110110100	24	F/7	111111111101101	23
7/9	1111111110110101	25	F/8	111111111101100	24
7/A	1111111110110110	26	F/9	111111111101101	25
			F/A	111111111101110	26



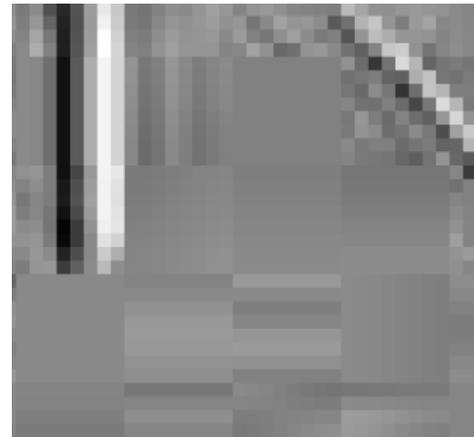
# JPEG Exemple

---

Originale

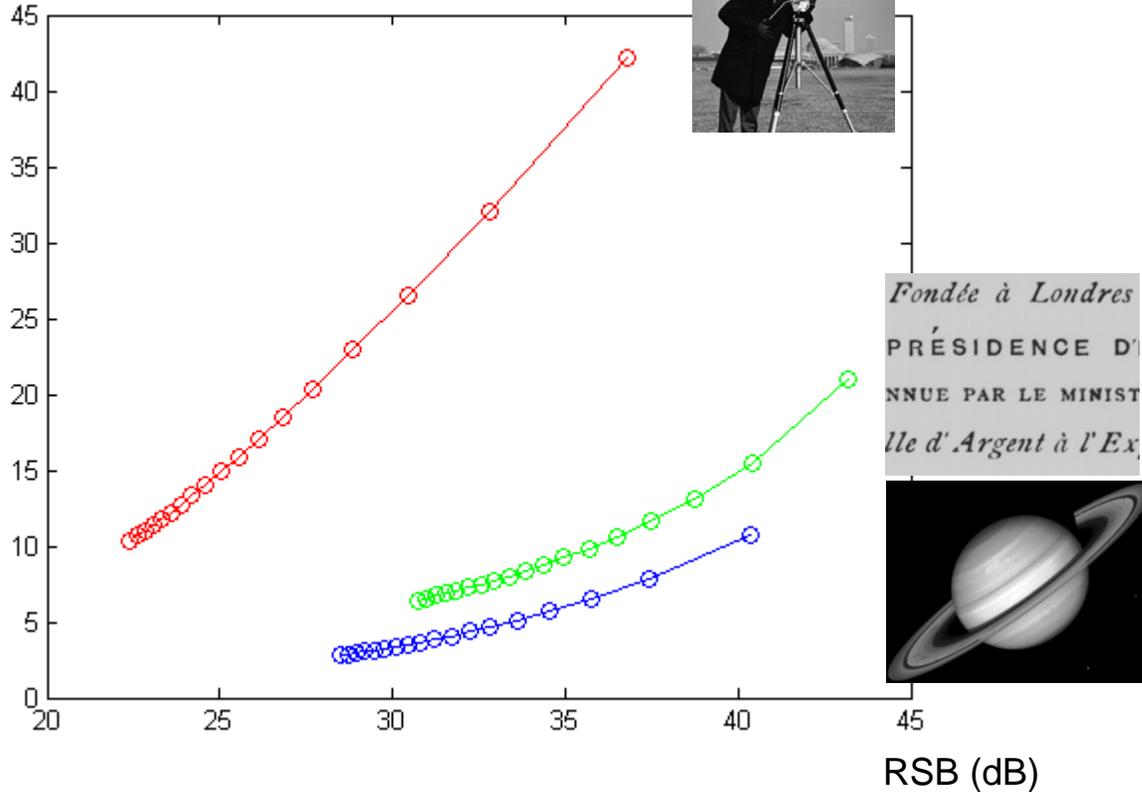


Compressée



# JPEG : courbe débit distorsion

Débit = % des coefficients non nulles



# 4. JPEG2000 et la Transformée en Ondelettes

---

## Les Idées...

Décrire les événements locaux dans signaux ou images  
Impossible avec Fourier (stationnarité)

Les phénomènes locaux sont sur les hautes fréquences

Les filtrer (Passe Bas) permet de compresser avec perte  
(sous-échantillonnage à  $F_e/2$ ,  $1pt/2$ ) idées voisines  
exploitées dans MP3

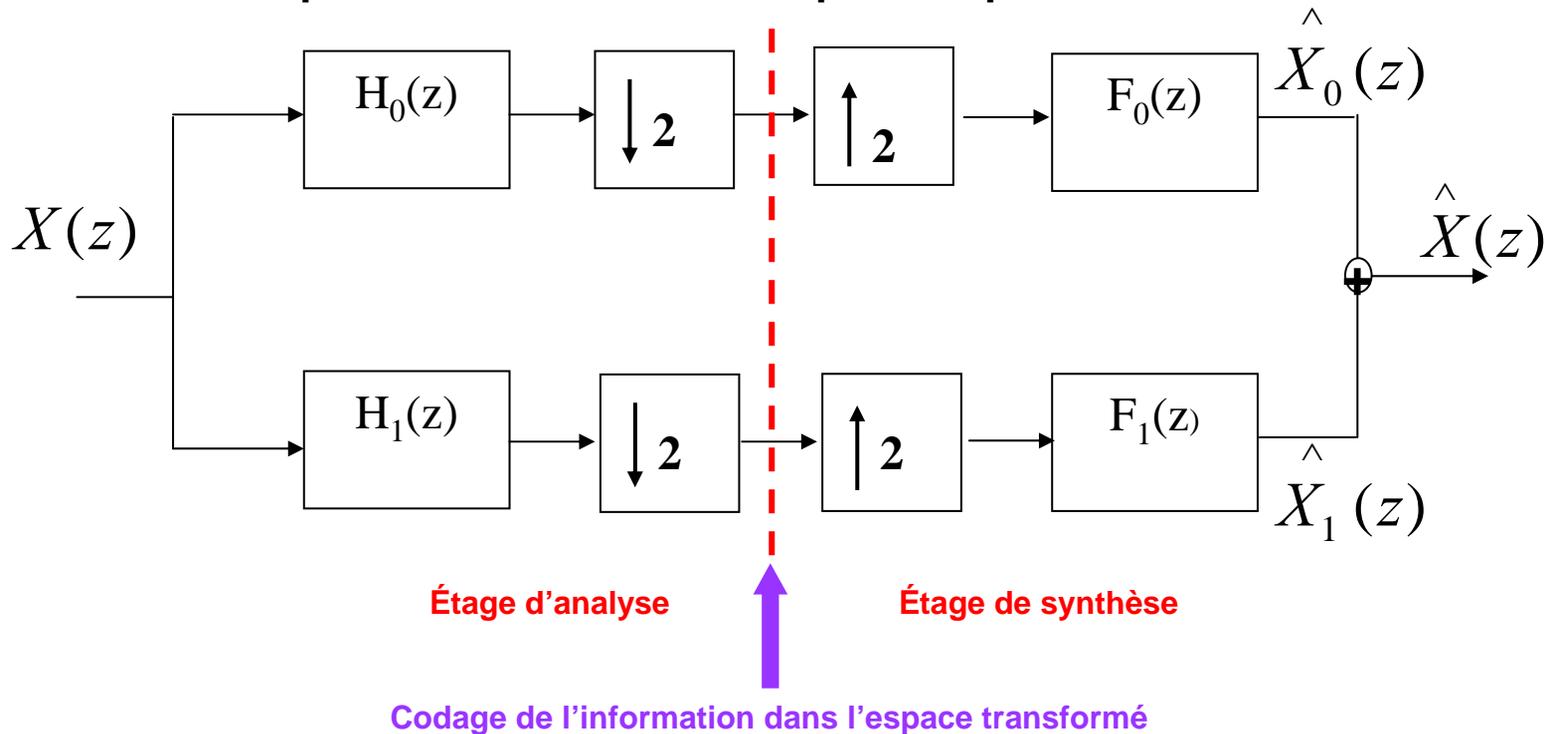
On peut les conserver et recoder (beaucoup de 0)  
compression sans perte

On ne travaille pas par blocs mais sur toute l'image

# 4.1 Rappels sur les bancs de filtres

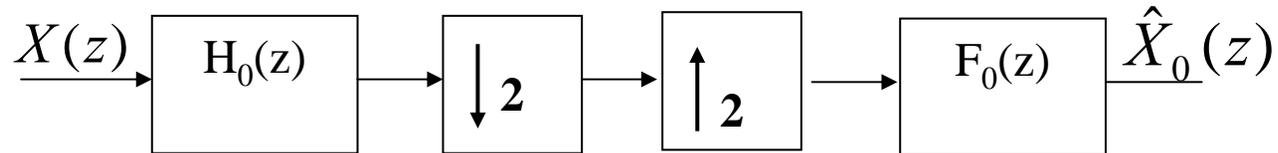
**Idée générale : On veut reconstruire parfaitement la sortie**

- on veut décimer en évitant le repliement de spectre : **Filtres Passe Bande**
- on veut interpoler en éliminant les fréquences parasites : **Filtres Passe Bande**



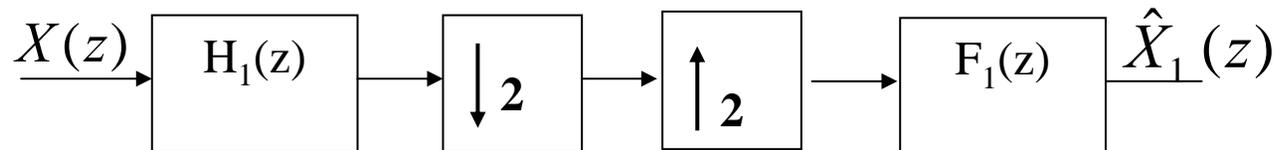
## a. Mis en équation du banc de filtres

Sur la branche supérieure on a



$$\hat{X}_0(z) = \frac{1}{2} \left( X(z)H_0(z) + X(-z)H_0(-z) \right) F_0(z)$$

Idem sur la branche inférieure



$$\hat{X}_1(z) = \frac{1}{2} \left( X(z)H_1(z) + X(-z)H_1(-z) \right) F_1(z)$$

## a. Mise en équation du banc de filtres

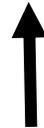
---

La sortie est la somme des deux branches

$$\hat{X}(z) = \hat{X}_0(z) + \hat{X}_1(z)$$

$$= \frac{1}{2} \left( X(z)H_0(z) + X(-z)H_0(-z) \right) F_0(z) + \frac{1}{2} \left( X(z)H_1(z) + X(-z)H_1(-z) \right) F_1(z)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ X(z) \left( H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z) \right) + X(-z) \left( H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) \right) \right]$$



Terme du au filtrage de X(z)  
dans les deux branches



Terme de repliement  
dans les deux branches

## b. Conditions de reconstruction

Pour avoir une reconstruction parfaite en sortie il faut:

### 1. Annuler l'effet du repliement

$$H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) = 0$$

**Solution:**

$$F_0(z) = H_1(-z)$$

$$F_1(z) = -H_0(-z)$$

- Le filtre de synthèse de la branche 0 est symétrique du filtre d'analyse de la branche 1



Ce sont des **filtres miroirs**

- Le filtre de synthèse de la branche 1 est miroir du filtre d'analyse de la branche 0

**Les repliements dans les deux branches se compensent exactement**

## b. Conditions de reconstruction

Pour avoir une reconstruction parfaite en sortie il faut:

### 2. Avoir un gain unitaire dans le banc avec un certain retard K

$$T(z) = \frac{1}{2} [H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)] = z^{-K}$$

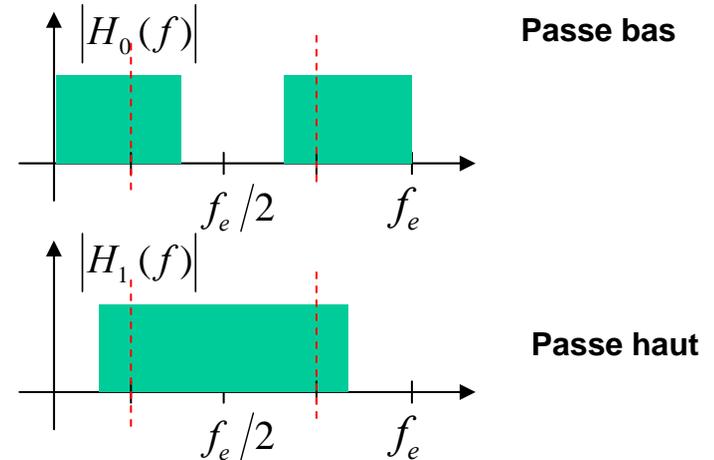
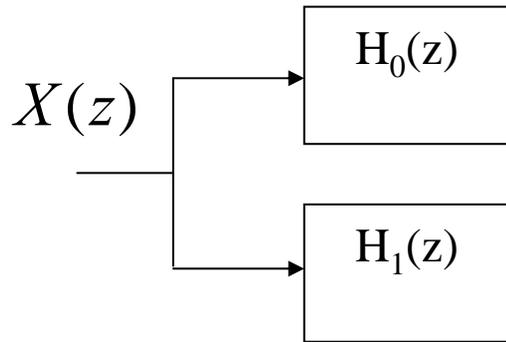
la fonction de transfert du banc

**Il y a deux solutions possibles pour satisfaire les conditions 1 & 2**

- Les filtres miroirs en quadrature (QMF: Quadrature Mirror Filters)
- Les filtres conjugués en quadrature (CQF: Conjugate Quadrature Filters)

## c. Filtrés miroirs en quadrature à reconstruction parfaite

Si l'on choisit des filtres miroirs pour le banc d'analyse



On choisit donc

$$H_1(z) = H_0(-z)$$

Or l'annulation du repliement (condition 1) a conduit à

$$F_0(z) = H_1(-z) \quad \text{et} \quad F_1(z) = -H_0(-z)$$

On déduit donc que  $T(z) = \frac{1}{2} [H_0^2(z) - H_0^2(-z)]$

## c. Filtrés miroirs en quadrature à reconstruction parfaite

la condition de reconstruction parfaite s'écrit alors

$$T(z) = \frac{1}{2} [H_0^2(z) - H_0^2(-z)] = z^{-K}$$

On montre qu'il n'y a qu'une solution possible de la forme

$$H_0(z) = h_0 z^{-2k_0} + h_1 z^{-(2k_1+1)}$$

alors la fonction de transfert du filtre s'écrit

$$T(z) = 2h_0 h_1 z^{-(2k_0+2k_1+1)}$$

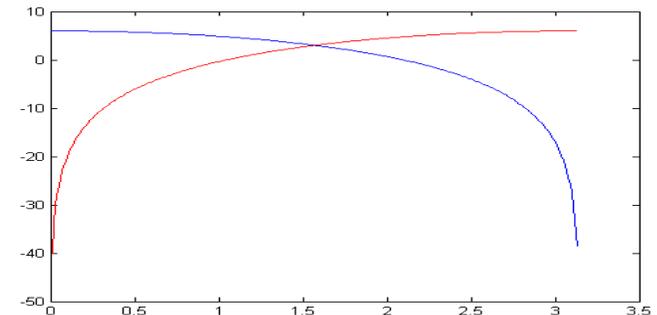
Mais les deux filtres d'analyse sont peu sélectifs

exemple pour  $h_0 = h_1 = k_0 = k_1 = 1$

$$|H_0(e^{j\omega})|^2 = 2(1 + \cos \omega)$$

$$|H_1(e^{j\omega})|^2 = 2(1 - \cos \omega)$$

peu adapté pour la compression



## c. Filtres miroirs en quadrature à reconstruction parfaite

---

### Cas particulier de la transformée de Haar

$$H_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}$$

Filtre passe bas d'ordre 1 = moyeneur

$$F_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}$$

Filtre passe haut d'ordre 1 = différenciateur

## d. Filtrés Conjugués en Quadrature à reconstruction parfaite

L'expression de la sortie du banc est

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2} \left[ X(z) \left( H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z) \right) + X(-z) \left( H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) \right) \right]$$

**1. Pour annuler le repliement il faut**

$$F_0(z) = H_1(-z)$$

$$F_1(z) = -H_0(-z)$$

**2. Pour avoir un gain unitaire dans le banc avec un certain retard K il faut**

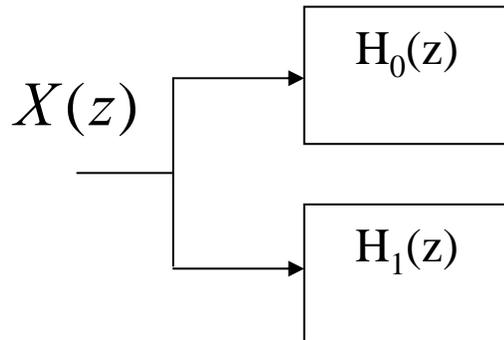
$$T(z) = \frac{1}{2} \left[ H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z) \right] = z^{-K}$$

en reportant la condition 1 dans cette expression on obtient

$$T(z) = \frac{1}{2} \left[ H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z) \right] = z^{-K}$$

## d. Filtrés Conjugués en Quadrature à reconstruction parfaite

Si on choisit des filtres d'analyse RIF symétriques



$$H_1(z) = -H_0(-z^{-1})z^{-(N-1)}$$

avec N pair

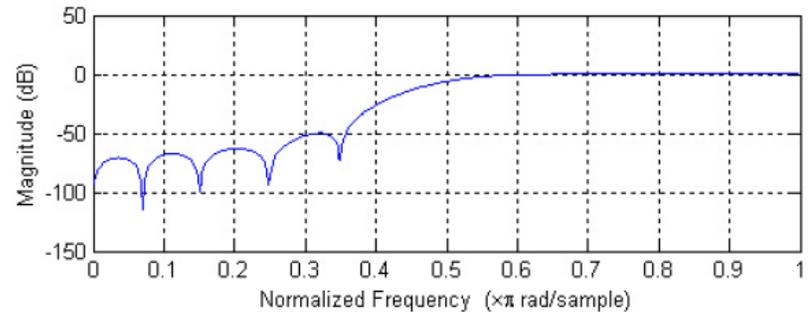
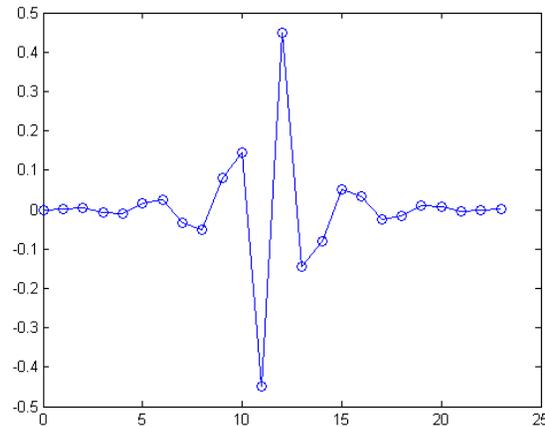
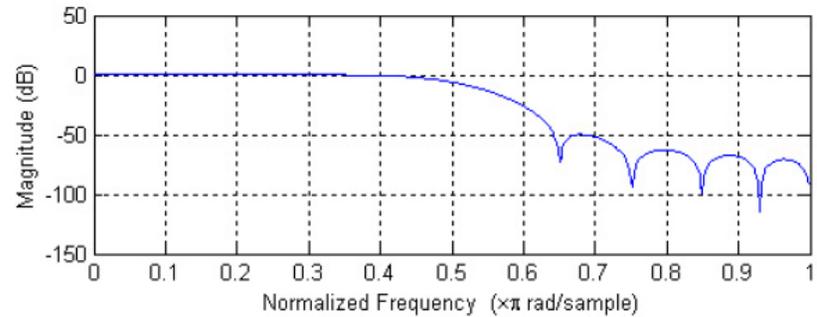
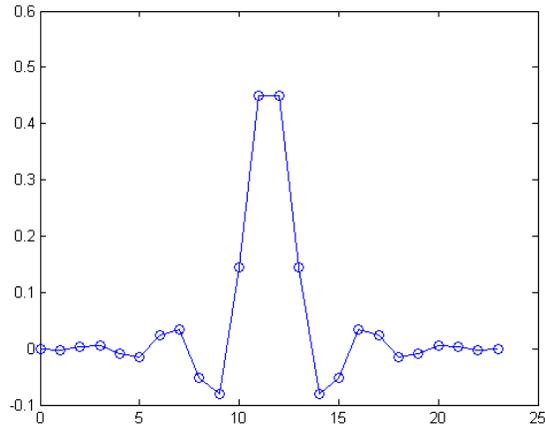
$$\text{Si } H_0(z) = \sum_{k=0}^N h(k)z^{-k}$$

$$\text{alors } H_1(z) = -\sum_{k=0}^N h(k)(-z)^{k-N}$$

$H_1(z)$  est le filtre miroir de  $H_0(z)$  et sa réponse impulsionnelle est retournée

# d. Filtrés Conjugués en Quadrature à reconstruction parfaite

## Exemple



## d. Filtres Conjugués en Quadrature à reconstruction parfaite

Alors la fonction de transfert du banc qui s'écrit

$$T(z) = \frac{1}{2} \left[ H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z) \right]$$

Devient

$$T(z) = \frac{1}{2} \left[ H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1}) \right] z^{-(N-1)}$$

Pour avoir une reconstruction parfaite en sortie il faut

$$T(z) = \frac{1}{2} \left[ H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1}) \right] z^{-(N-1)} = z^{-K}$$

Il suffit donc d'avoir

$$H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1}) = Cste$$

## d. Filtrés RIF symétriques à reconstruction parfaite

---

Il faut avoir

$$H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1}) = Cste$$

avec  $G(z) = H_0(z)H_0(z^{-1})$

Soit  $G(z) = Z\left(\sum_k h(k)h(k+n)\right) = Z(g(n))$

C'est la transformée en Z de la fonction d'autocorrélation du filtre  $H_0$

La condition de reconstruction parfaite conduit à avoir finalement

$$\sum_{k=0}^N h(k)h(k+2n) = \delta_n = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

La réponse impulsionnelle du filtre prototype est orthogonale à toute version d'elle-même décalée d'elle-même d'un nombre pair d'échantillons

---

## d. Filtrés RIF symétriques à reconstruction parfaite

---

### Exemple les filtres de Daubechie

d'ordre 2:  $h_0 = 0.707, 0.707$  (Haar)

d'ordre 4 :  $h_0 = -0.1294, 0.2241, 0.8365, 0.4829$

d'ordre 6 :  $h_0 = 0.0352, -0.0854, -0.1350, 0.4599, 0.8069, 0.3327$

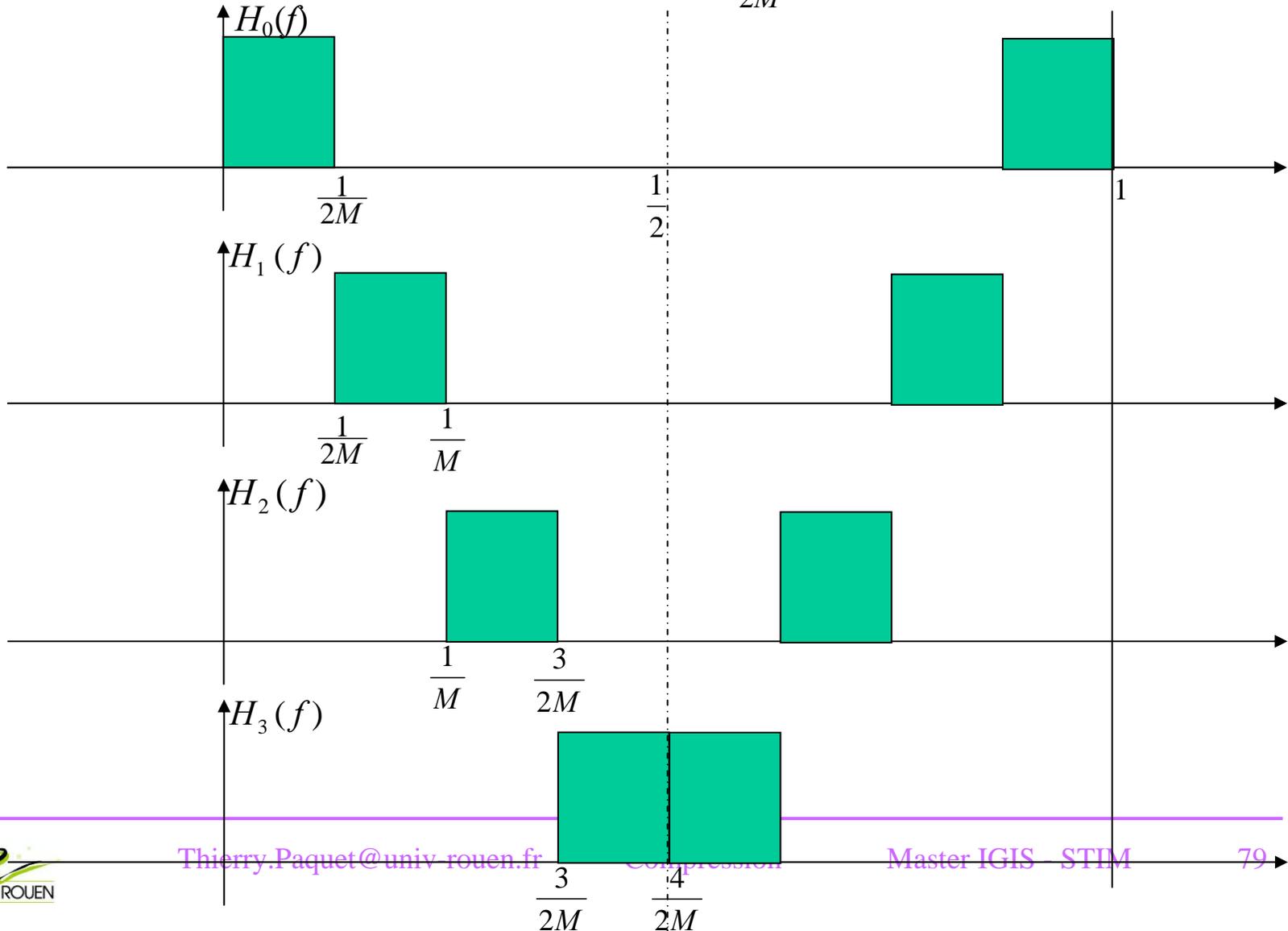
d'ordre 8 :  $h_0 = -0.0106, 0.0329, 0.0308, -0.1870, -0.0280, 0.6309, 0.7148, 0.2304$

d'ordre 10 :  $h_0 = 0.0033, -0.0126, -0.0062, 0.0776, -0.0322, 0.1384, 0.7243, 0.6038, 0.1601$

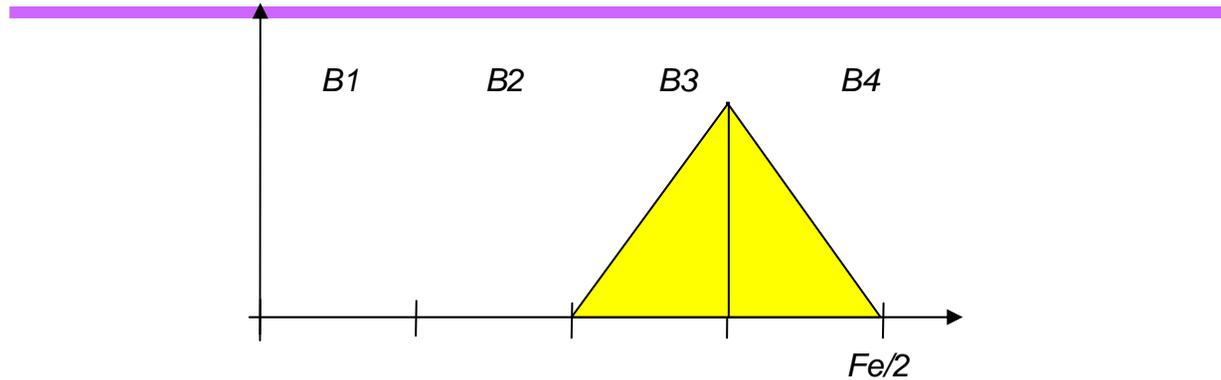
....

# Allures des filtres passe-bande : exemple pour $M=4$

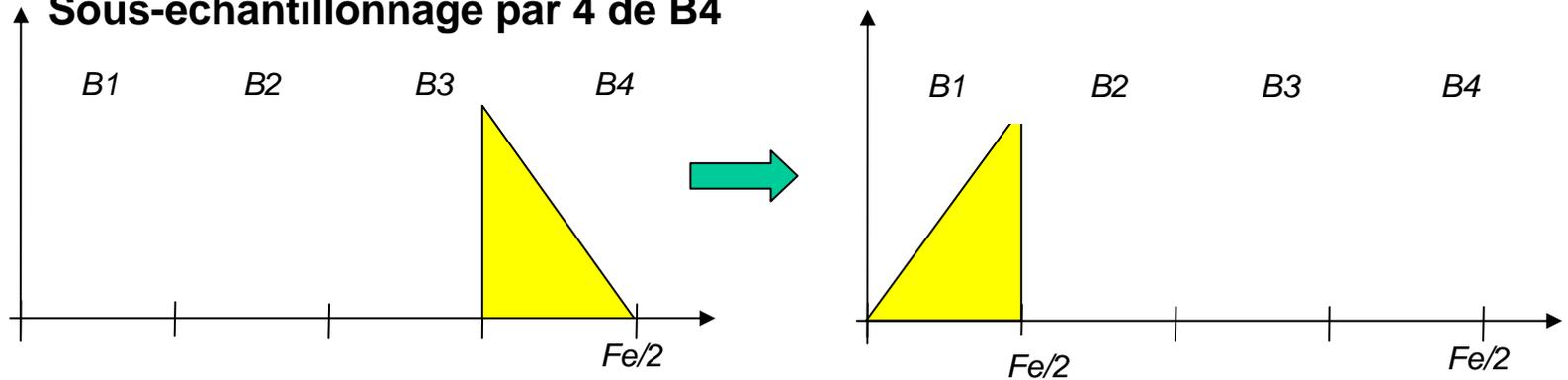
On construit  $M$  filtres passe-bande de largeur  $\frac{1}{2M}$



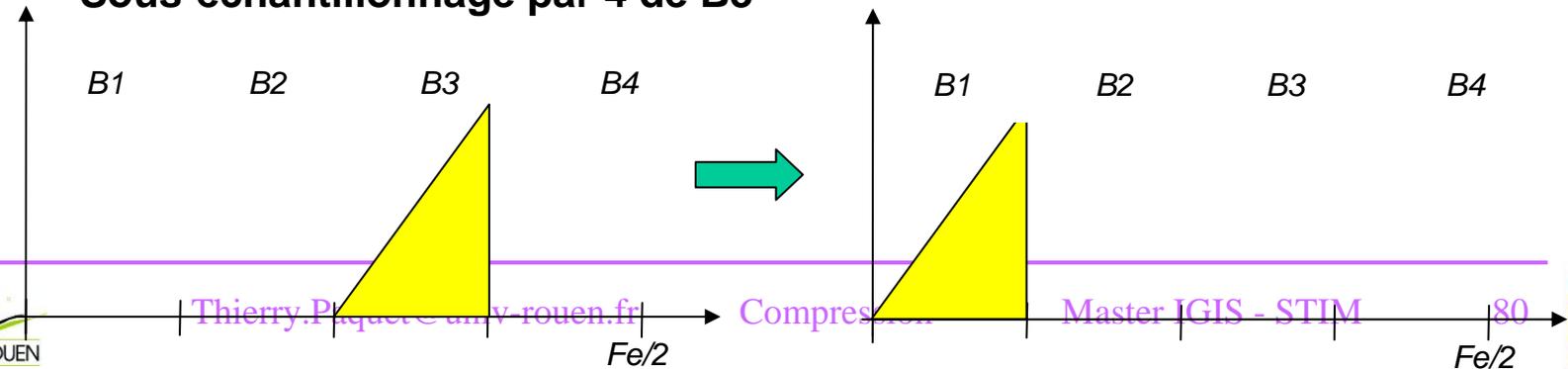
# Sous-échantillonnage critique (sans perte d'information)



**Sous-échantillonnage par 4 de B4**

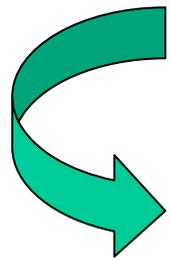
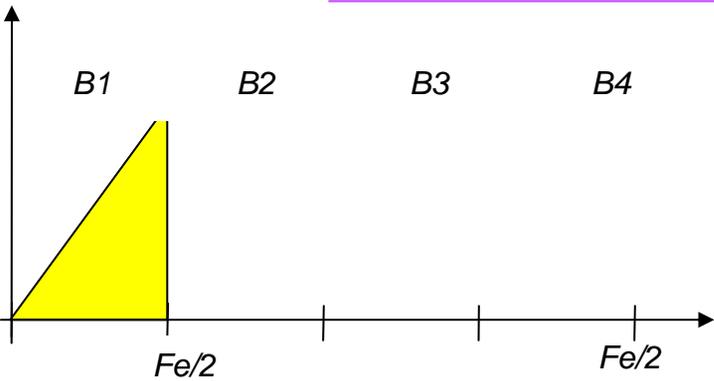


**Sous-échantillonnage par 4 de B3**

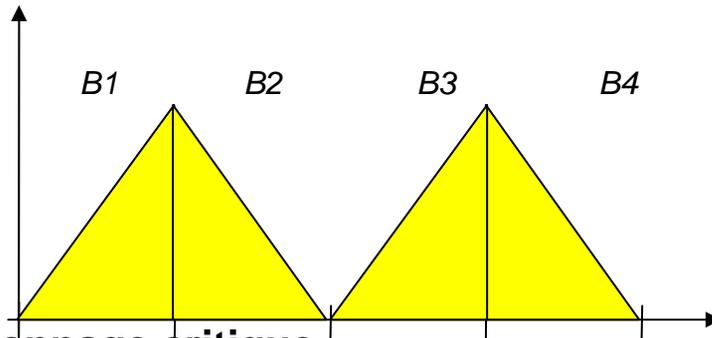


# Sur-échantillonnage & Interpolation

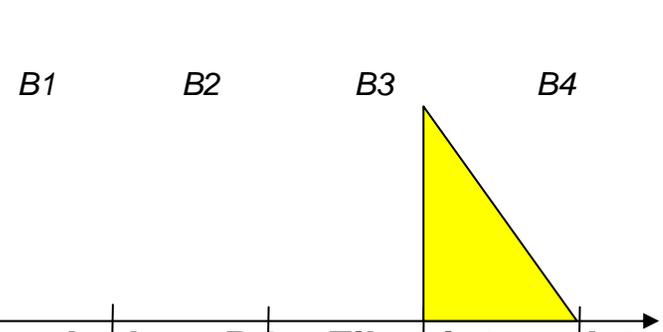
Pour B4



Sur-échantillonnage critique



Filtrage passe bande dans B4 = Filtre interpolateur



# Transformée en ondelettes: Banc de filtres en série

---

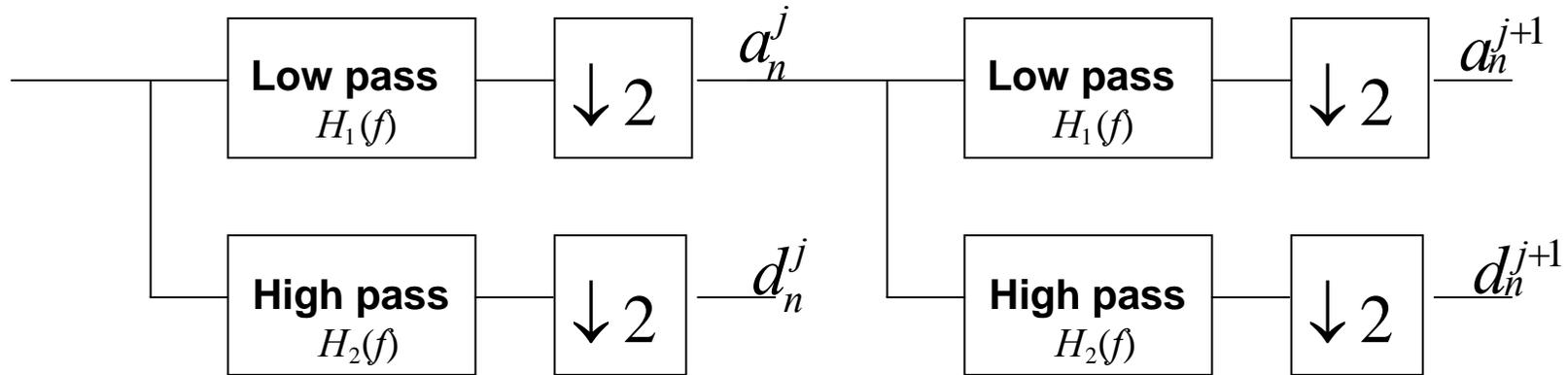


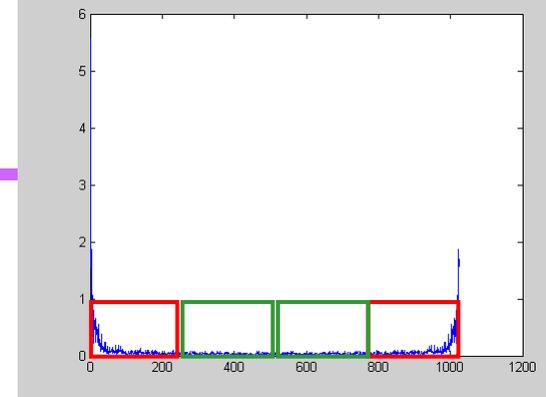
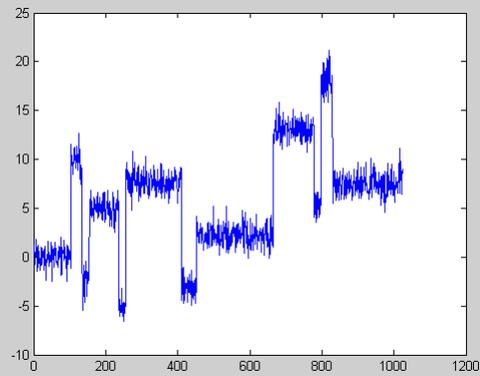
Schéma d'analyse multi-résolution à différentes échelles  $j$

**a** = approximations

**d** = détails

## Niveau 0

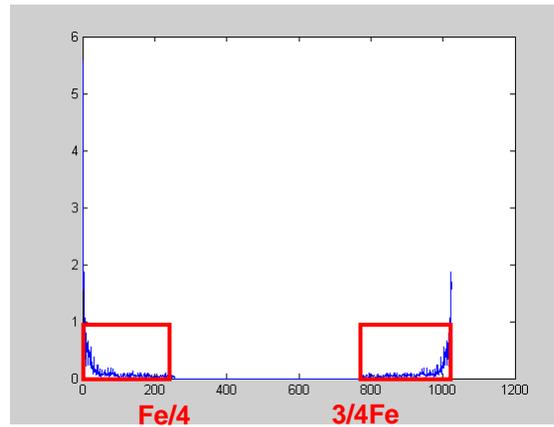
### Signal et Spectre



## Niveau 1

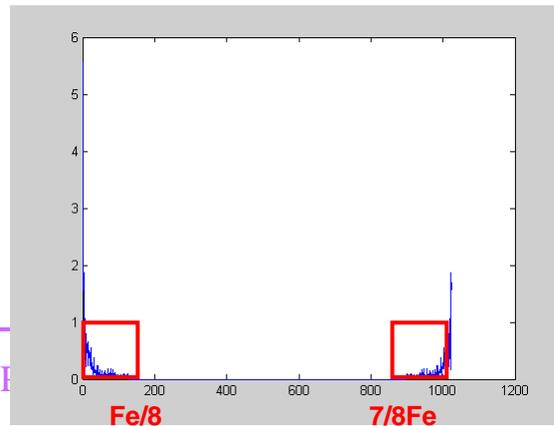
### Spectres de l'approximation et des détails

Filtres Passe Bas Fe/4  
Filtre Passe-Haut Fe/4

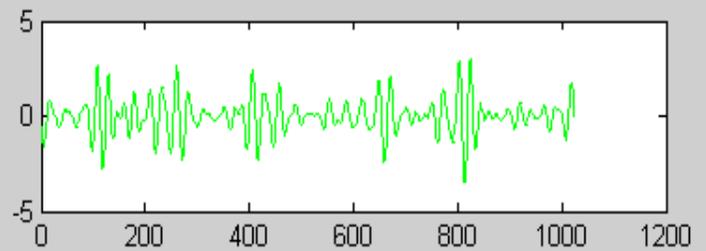
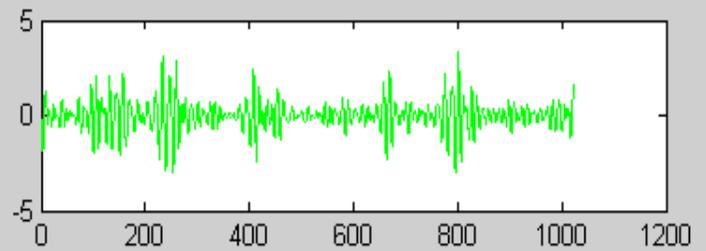
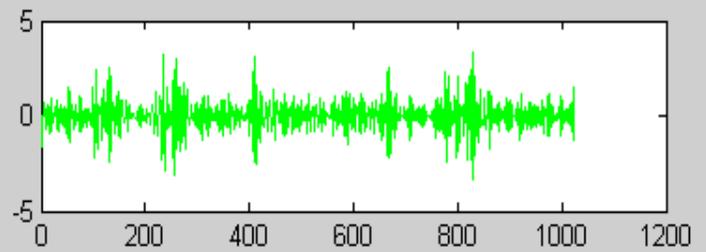
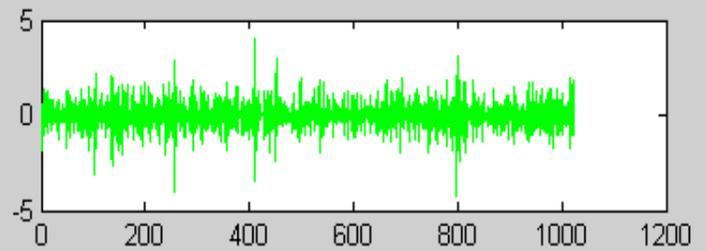
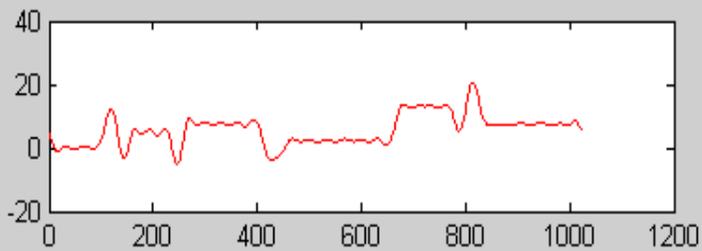
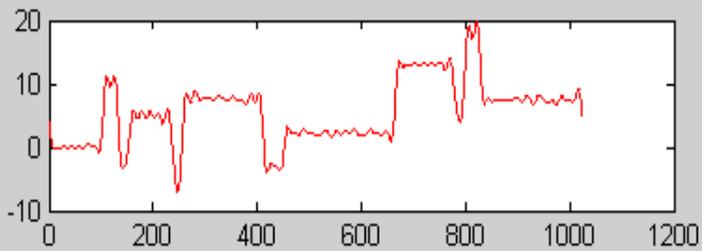
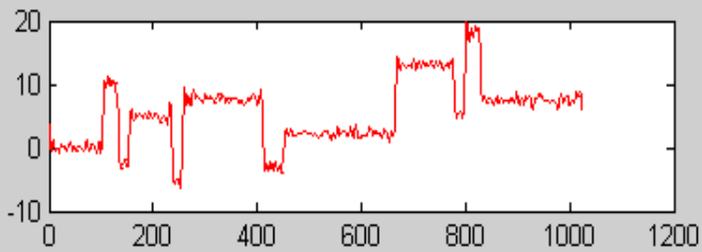
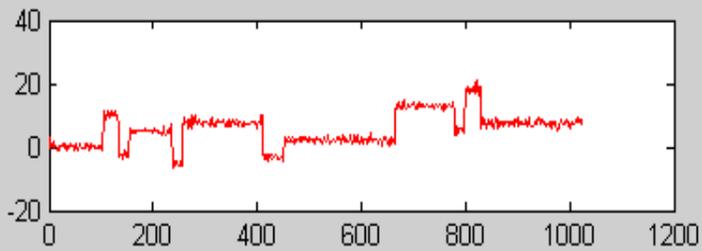
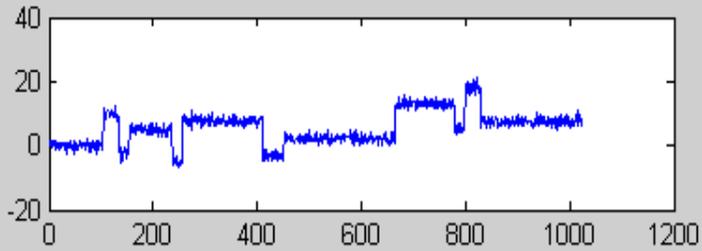


## Niveau 2

Filtres Passe Bas Fe/8  
Filtre Passe Haut Fe/8 Fe/4



# Approximations et détails dans le temps



# Les idées...

---

**Au niveau  $i$**

**On peut décimer d'un facteur 2 l'approximation sans perte**

**$Fe' = Fe/2$**

**Alors au niveau  $i+1$**

**filtre passe bande dans  $[Fe/8 \ Fe/4]$  est un passe haut dans la bande  $[Fe'/4 \ Fe'/2]$**

**Donc on utilise la même paire de filtres passe-bas et passe haut à chaque étape**

**La transformée en ondelettes permet d'exprimer les propriétés de la paire de filtres pour que la reconstruction sans perte soit possible**

## 4.2. La Transformée en Ondelettes

Dans le cas continu

Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jt\omega} dt = \langle f, e^{jt\omega} \rangle$$

Fourier et fenêtre glissante

translation  
largeur fixe

$$F(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(\tau - t)e^{-jt\omega} dt = \langle f, \psi_{\tau, \omega} \rangle$$

exemple: Transformée de Gabor

$$g(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2}}$$

Limite: résolution temporelle et fréquentielle indépendantes

$$\sigma_t = 1$$

$$\sigma_f = \frac{1}{2\pi}$$

## 4.2. La Transformée en Ondelettes

---

### Transformée en Ondelettes

$$F(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \langle f, \psi_{a,b} \rangle$$

$a$  est le facteur d'échelle: faible si analyses locales

$b$  est le paramètre de translation

$\psi$  est l'ondelette mère

on projette  $f$  sur une fonction analysante  $\psi_{a,b}$

conservation de la norme par chgt d'échelle  $\|\psi_{a,b}\|^2 = \|\psi\|^2$

Résolutions temporelle et fréquentielle inverses

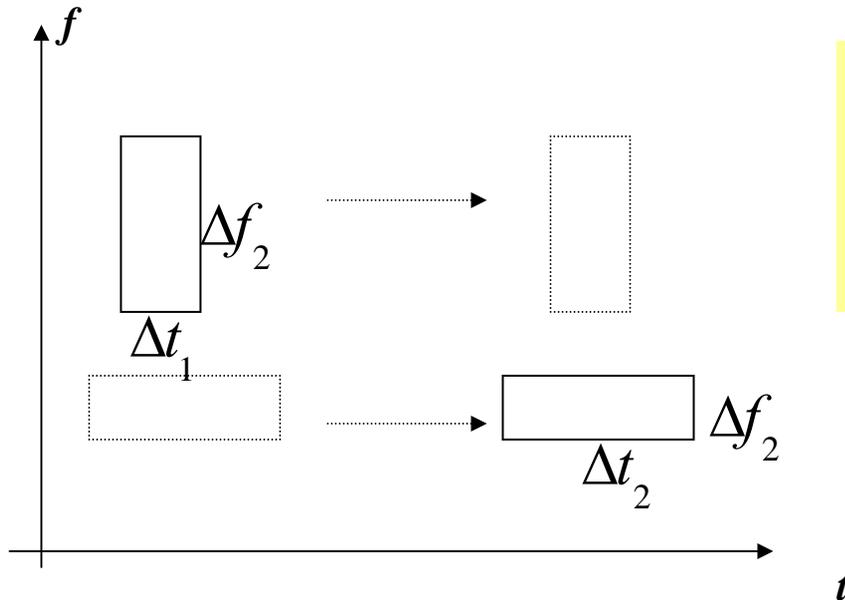
- si l'étendue temporelle de l'ondelette mère est 1

celle de  $\psi_{a,0}$  est  $a$

-l'étendue fréquentielle est  $1/a$

# Principe d'Incertitude

## Fenêtre temps-fréquence



$$\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{2}$$

*égalité pour la  
fenêtre Gaussienne*

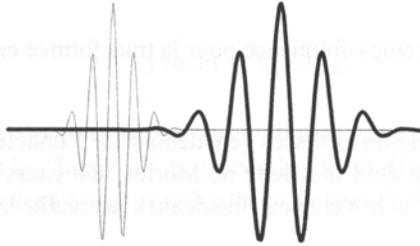
*On ne peut pas localiser simultanément avec la même précision  
dans le temps et en fréquence*

# Exemples d'Ondelettes

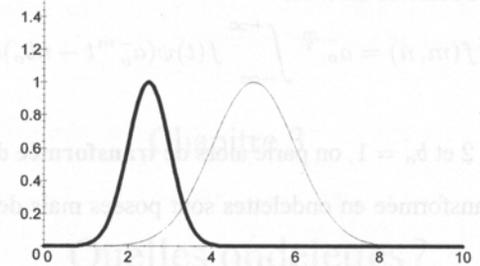
## Ondelette de Morlet

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-j\omega_0 x}$$

temps



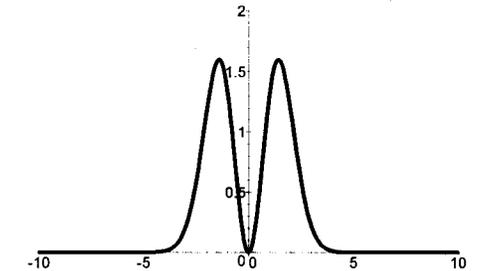
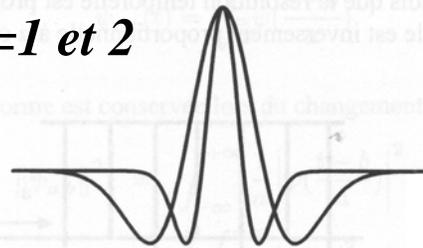
fréquence



## Chapeau mexicain

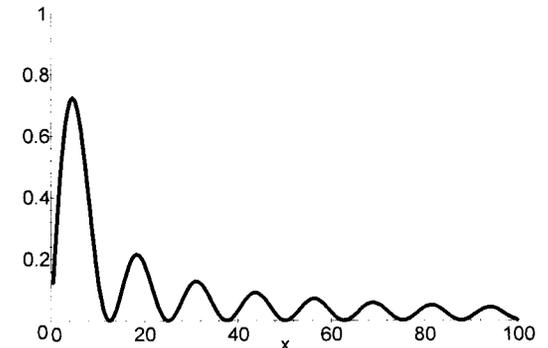
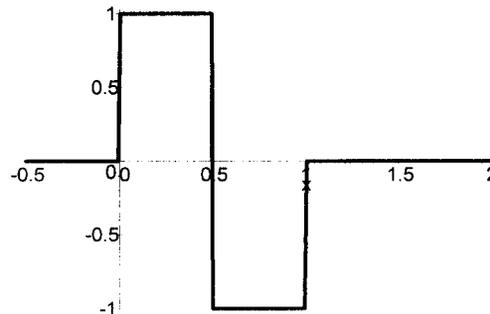
$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1-x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$a=1$  et  $2$



## Ondelette de Haar

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

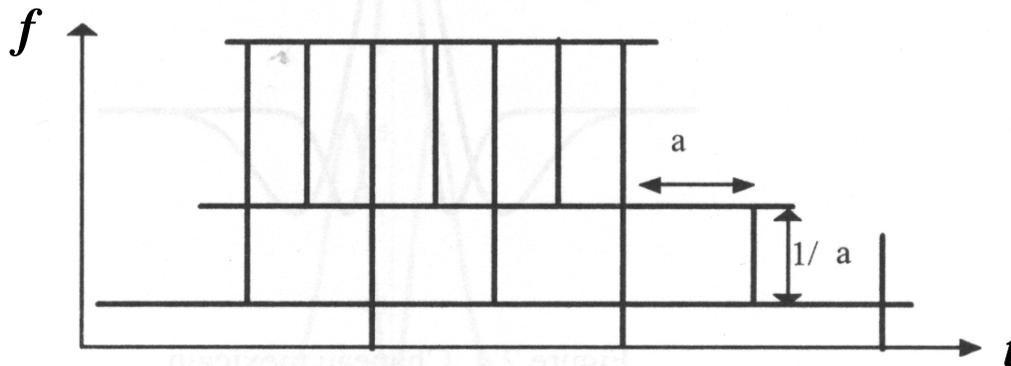


# Ondelettes Discrètes

## Discrétisation de l'espace temps-fréquence

quand la résolution temporelle est proportionnelle à  
la résolution fréquentielle est proportionnelle à

a  
1/a



Pour obtenir un pavage complet de l'espace temps fréquence  
on choisit un échantillonnage temporel au pas  $b=a_0^m$

qui conduit à l'échantillonnage des fréquences au pas  $\frac{1}{a_0^m}$

m est le facteur d'échelle. m=0 sur le signal d'origine

# Ondelettes Discrètes

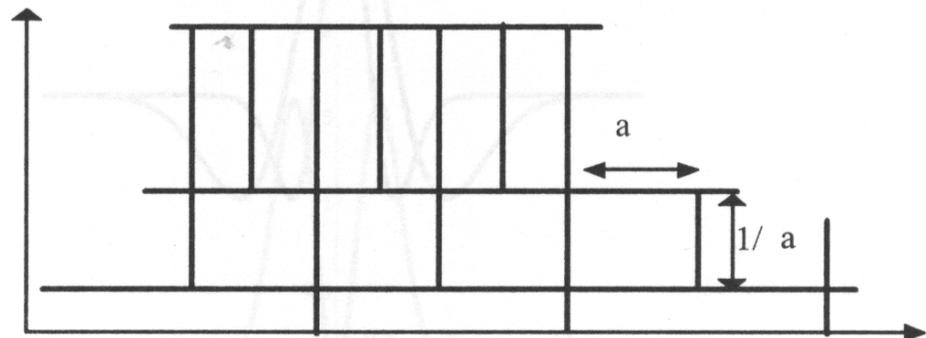
La transformée en Ondelettes discrètes est alors:

$$F(m,n) = \frac{1}{a_0^{m/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi(a_0^{-m}t - nb) dt$$

avec  $b = a_0^m$

On choisit en général la transformée dyadique

c.a.d  $a_0 = 2$



## 4.3. Analyse Multi-Résolution

---

### Espace d'approximation

Le signal est approché à la résolution  $j$  par un signal grossier

L'opérateur  $A_j$

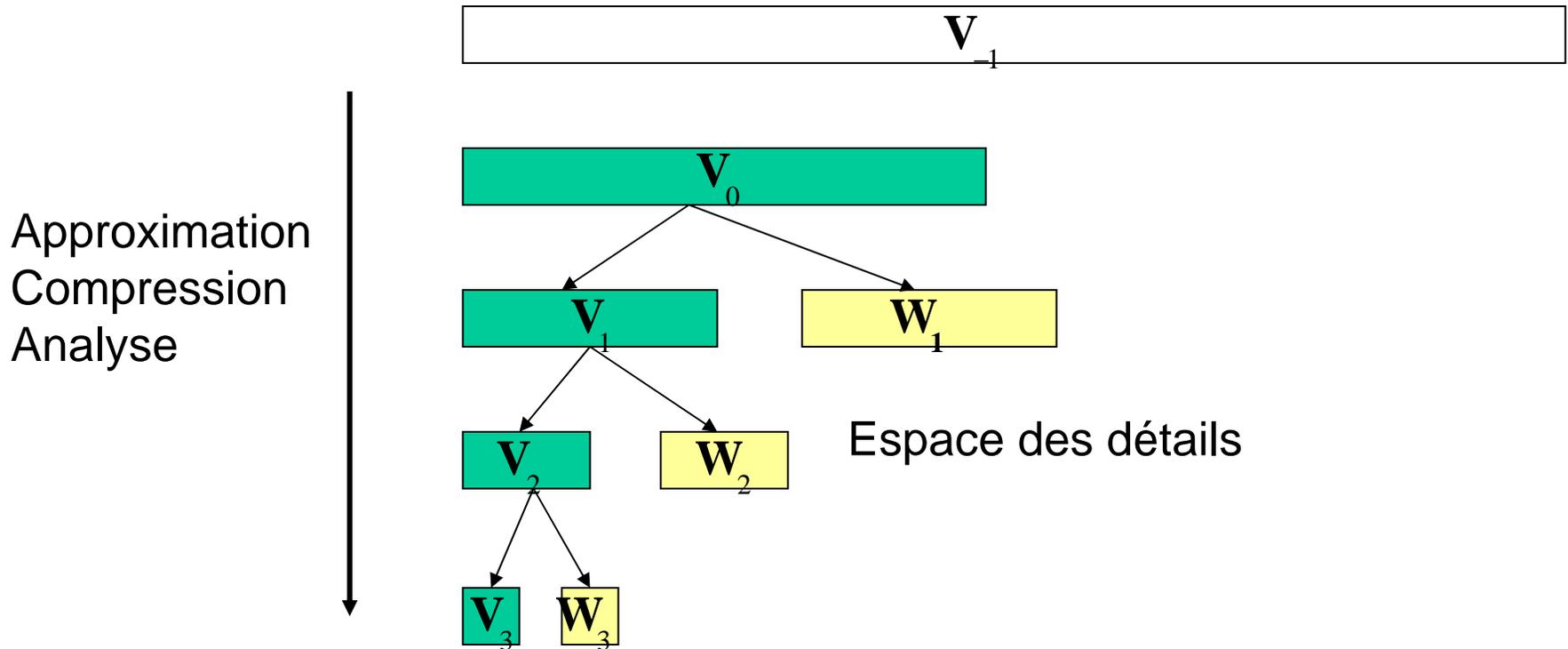
Projette le signal  $\mathbf{u}$

Dans l'espace  $\mathbf{V}_j$

Dans le cas dyadique on a:

$$u(x) \in \mathbf{V}_j \Leftrightarrow u\left(\frac{x}{2}\right) \in \mathbf{V}_{j+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_{j+1} \subset \mathbf{V}_j$$

# Schéma de l'analyse



# Fonction d'échelle

La **fonction d'échelle**  $\varphi(x)$  engendre une base orthonormée de **l'espace des approximations**  $V_j$  à l'échelle  $j$  par translation et dilatation

$$\varphi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - n2^j)$$

La projection du signal  $u$  dans l'espace d'approximation à la résolution  $j$  s'écrit

$$\mathbf{A}_j \mathbf{u} = \sum_n \langle u, \varphi_{j,n} \rangle \varphi_{j,n}$$

Les coefficients de l'approximation sont

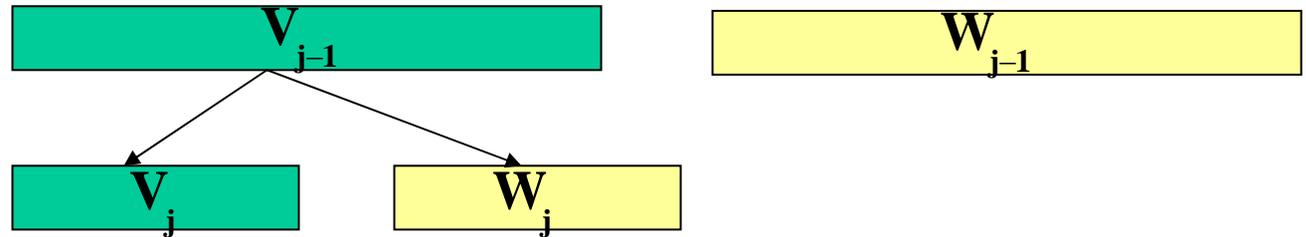
$$\langle u, \varphi_{j,n} \rangle = a_n^j$$

les produits scalaires avec les dilatées et translattées de la fonction d'échelle

# Espace des détails

---

C'est le complément orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j-1}$



on note  $V_j \oplus W_j = V_{j-1}$

Donc  $W_{j-1}$  est orthogonal à  $V_{j-1}$  et donc à  $V_j$  et  $W_j$

Les sous-espaces des détails ne sont pas emboîtés entre eux!

# Ondelette

Il existe **une Ondelette**  $\psi(x)$  qui par dilatation et translation engendre une base orthonormale de l'**espace des détails**  $W_j$  à l'échelle  $j$

$$\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - n2^j)$$

La projection du signal  $u$  dans l'espace des détails à la résolution  $j$  s'écrit:

$$D_j u = \sum_n \langle u, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$$

Les coefficients des détails sont:

$$\langle u, \psi_{j,n} \rangle = d_n^j$$

les produits scalaires avec les dilatées et translattées de l'ondelette mère

# Reconstruction ou synthèse

---

A l'échelle  $j-1$  l'approximation est la somme de l'approximation et des détails à l'échelle  $j$

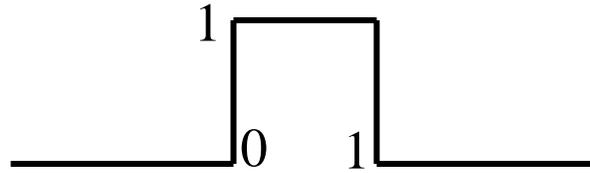
$$\mathbf{V}_{j-1} = \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j$$

donc

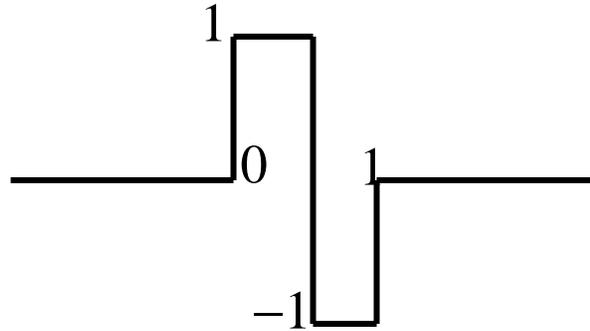
$$\mathbf{A}_{j-1}\mathbf{u} = \mathbf{A}_j\mathbf{u} + \mathbf{D}_j\mathbf{u}$$

# L'Ondelette de Haar

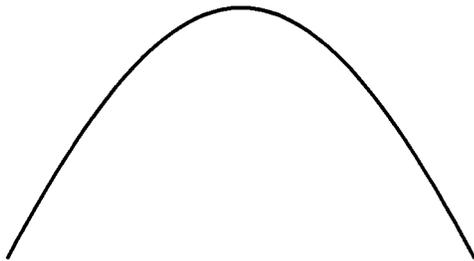
Fonction d'échelle



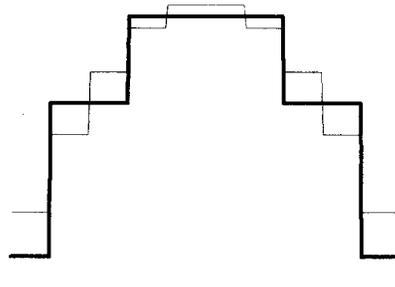
Ondelette



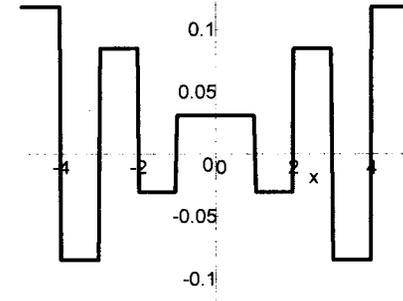
Exemple



$A_0$  et  $A_1$



$D_1$



# L'Ondelette de Haar

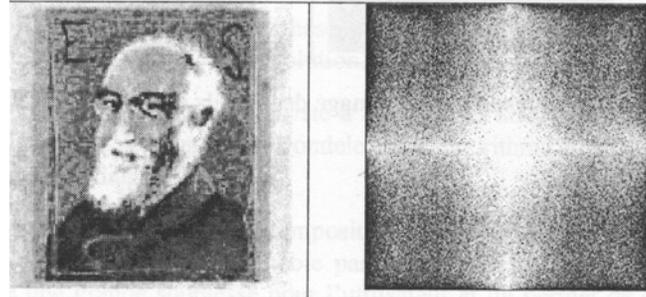
---

**Originale**



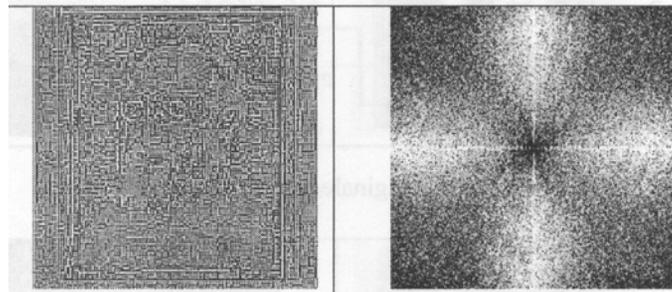
**Spectre Original**

**Approximation A1**



**Spectre de A1**

**Détails D1**



**Spectre de D1**

# Algorithme Récuratif (S. Mallat 89)

---

**S. Mallat a proposé un algorithme récursif qui permet de calculer l'approximation et les détails à l'échelle  $j+1$  à partir de l'approximation à l'échelle  $j$  en utilisant des filtres**

**L'analyse est l'étape de calcul des approximations et détails**

**La reconstruction suit la démarche inverse pour reconstruire l'image originale sans pertes**

# Algorithme d'Analyse: résolution j-1 à j

## 1. Projection sur les fonctions d'échelle:

$$\mathbf{A}_j \mathbf{u} = \sum_n \alpha_n^j \varphi_{j,n} = \sum_n \langle u, \varphi_{j,n} \rangle \varphi_{j,n} \quad \text{à exprimer en fonction des } \alpha_n^{j-1}$$

si on parvient à écrire les fonctions d'échelle en fonction d'elles mêmes

$$\varphi_{j,n}(x) = \sum_k h(k) \varphi_{j-1, k+2n}(x)$$

alors on obtient le résultat recherché

$$\alpha_n^j = \langle u, \varphi_{j,n} \rangle = \sum_k h(k) \langle \mathbf{u}, \varphi_{j-1, k+2n} \rangle = \sum_k h(k) \alpha_{k+2n}^{j-1}$$

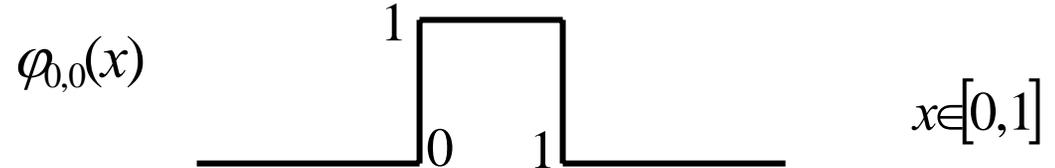
C'est une formule de filtrage des approximations après décimation !

$$\alpha_n^j = \langle u, \varphi_{j,n} \rangle = \sum_l h(l-2n) \alpha_l^{j-1} = \sum_l \tilde{h}(2n-l) \alpha_l^{j-1}$$

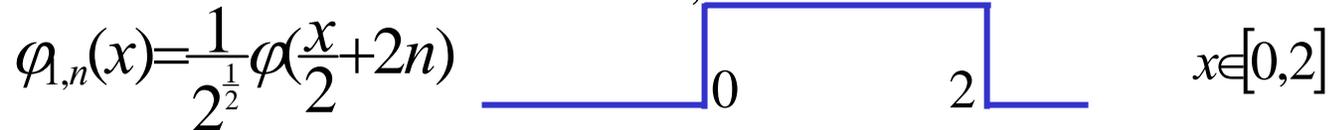
Les coefficients du filtre sont les coefficients qui expriment la fonction d'échelle en fonction d'elle-même à la résolution supérieure

# Exemple d'analyse: Fonction d'échelle de Haar

A l'échelle  $j = 0$



A l'échelle  $j = 1$



On parvient à exprimer la fonction d'échelle en fonction d'elle-même à l'échelle supérieures:

$$\varphi_{1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{0,0}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{0,1}(x)$$

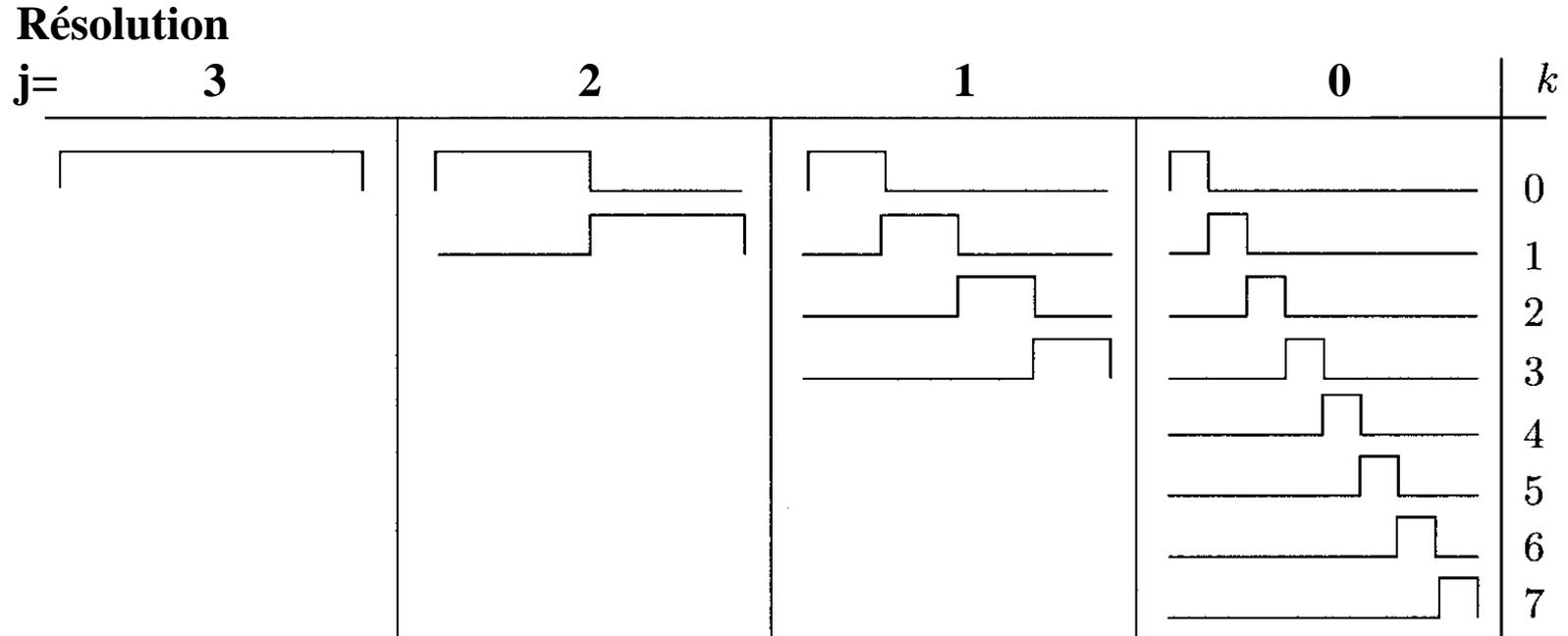
Donc on déduit les coefficients du filtre de l'analyse multi-échelle

$$h(n) = \left\{ \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots \right\}$$

et on obtient les coefficients du filtre

à la résolution inférieure l'approximation est la moyenne pondérée avec le voisin

# Les fonctions d'échelle de Haar



Exemple:

à la résolution 0 il faut 8 tradlatées de la fonction d'échelle  
à la résolution 1 il en suffit de 4 à la résolution 2 fois plus importante pour projeter toute l'image  
... etc

Le nombre de translations n est divisé par deux lorsqu'on augmente la résolution de 1

# Algorithme d'analyse: ondelettes de j-1 à j

## 2. Projection sur les fonctions d'Ondelettes:

$$\mathbf{D}_j \mathbf{u} = \sum_n \langle \mathbf{u}, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$$

Si on peut écrire les ondelettes à l'échelle j en fonction des fonction d'échelle à la résolution j-1

$$\psi_{j,n}(x) = \sum_k g(k) \varphi_{j-1,k+2n}(x)$$

Alors on obtient le résultat recherché:

$$d_n^j = \langle \mathbf{u}, \psi_{j,n} \rangle = \sum_k g(k) \langle \mathbf{u}, \varphi_{j-1,k+2n} \rangle = \sum_k g(k) a_{k+2n}^{j-1}$$

C'est une seconde formule de filtrage des approximations après décimation !

$$d_n^j = \sum_l g(l-2n) a_l^{j-1} = \sum_l \tilde{g}(2n-l) a_l^{j-1}$$

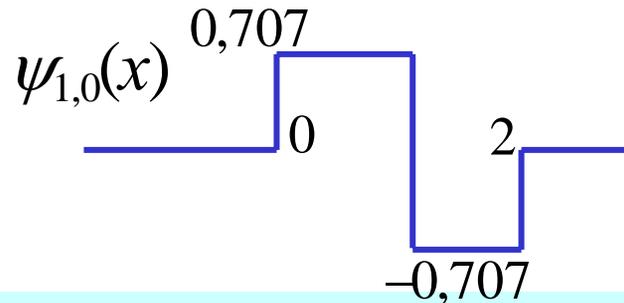
Les coefficients du filtre sont les coefficients qui expriment la fonction d'ondelette en fonction des fonctions d'échelle à la résolution supérieure

# Exemple: Ondelette de Harr

A l'échelle  $j=0$



A l'échelle  $j=1$



soit

$$\psi_{1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{0,0}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{0,1}(x)$$

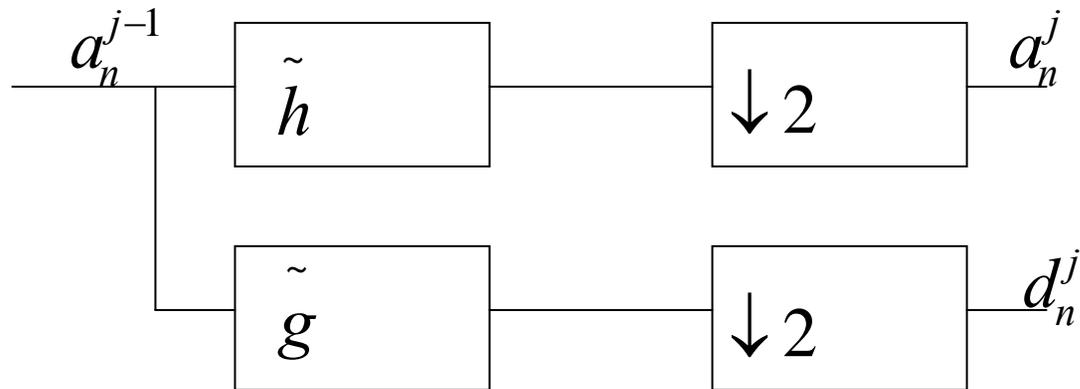
Et

$$g(n) = \left\{ \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots \right\}$$

À la résolution inférieure le détail est la différence avec le voisin

# Schéma de l'algorithme de décomposition

---



# Algorithme de reconstruction

On part de l'équation  $\mathbf{A}_{j-1}\mathbf{u}=\mathbf{A}_j\mathbf{u}+\mathbf{D}_j\mathbf{u}$

et on montre que:

$$a_n^{j-1} = \sum_k a_k^j h(n-2k) + \sum_k d_k^j g(n-2k)$$

que l'on peut ré-écrire

$$a_n^{j-1} = \sum_l a_l^j h(n-l) + \sum_l d_l^j g(n-l)$$

Interprétation

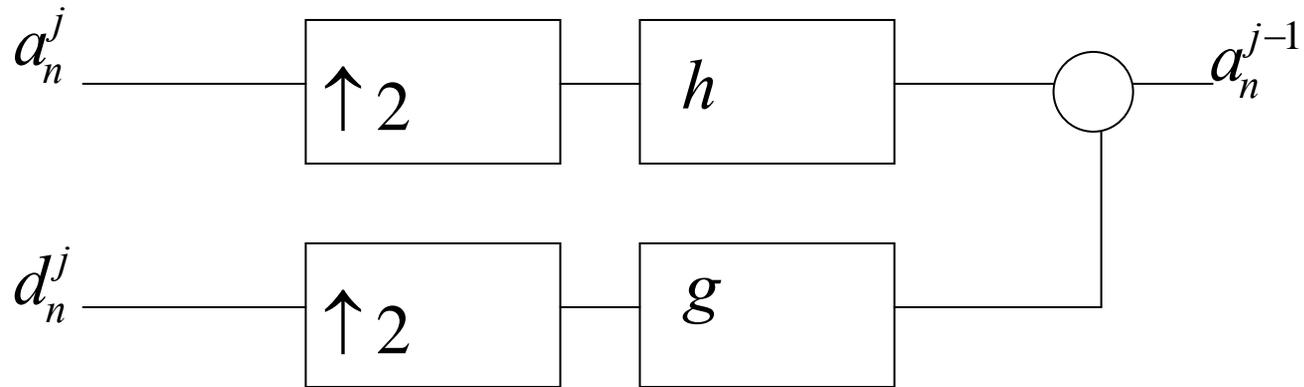
on sur-échantillonne détails et approximations  
les filtres interpolateurs sont  $h(k)$  et  $g(k)$

$$a_n^j \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

$$a_n^{j-1} \quad \mathbf{0} \bullet \mathbf{0} \bullet \mathbf{0} \bullet \mathbf{0} \bullet \mathbf{0} \bullet \mathbf{0} \bullet \mathbf{0} \bullet$$

# Schéma de l'algorithme de synthèse

---



# Exercice

Soit le filtre passe bas moyennneur défini par la relation de convolution suivante :  $s(k) = \frac{e(k) + e(k-1)}{\sqrt{2}}$

1- Retrouver l'expression de sa fonction de transfert en z que l'on notera H(z) ainsi que l'expression des 2 coefficients de sa réponse impulsionnelle que l'on notera h(0) et h(1).

Soit le filtre passe haut complémentaire du précédent défini par la relation de convolution suivante :  $s(k) = \frac{e(k) - e(k-1)}{\sqrt{2}}$

2- Déterminer l'expression de sa fonction de transfert en z que l'on notera G(z) ainsi que l'expression des 2 coefficients de sa réponse impulsionnelle que l'on notera g(0) et g(1).

3- Représenter sur le même diagramme la courbe de gain des 2 filtres.

Soit u(k) le signal rampe unitaire numérique défini par : u(k) = k si k ≥ 0 et 0 sinon

On note  $s_b(k)$  le signal résultat du filtrage de u(k) par le filtre passe bas, et  $s_h(k)$  le résultat du filtrage par le passe haut.

4 - Calculer les premiers échantillons de  $s_b(k)$  et de  $s_h(k)$

Sur chacun de ces deux signaux on choisit de décimer un échantillon sur 2.

5- En vous aidant de la courbe tracée à la question 3, indiquer si cette opération est faite avec ou sans repliement de spectre.

6- On note  $s_b^{1/2}(k)$  et  $s_h^{1/2}(k)$  les deux signaux décimés. Calculer les valeurs de leurs premiers échantillons.

7- De ces 2 signaux décimés indiquer lequel peut être considéré comme l'approximation de u(k) et lequel peut être considéré comme un signal des détails.

# Exercice

---

**Nous nous intéressons maintenant à l'étape de synthèse au cours de laquelle nous allons chercher à reconstruire le signal  $u(k)$  à partir du signal d'approximation et du signal de détails. On construit pour cela les deux filtres conjugués définis par les relations:**

$$\tilde{h}(k)=h(2-k) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(k)=g(2-k)$$

**On sur-échantillonne d'un facteur 2 les signaux en procédant en 2 étapes :**

**Etape 1 : ajout d'une valeur nulle entre 2 échantillons successifs**

**Etape 2 : puis filtrage de l'approximation par et des détails par**

- 8- Calculer le signal des détails sur-échantillonné ainsi que le signal des approximations.
- 9- Calculer le signal somme de l'approximation et des détails. Conclusion ?

# Exemple

## Analyse par l'ondelette de Haar d'un signal rampe

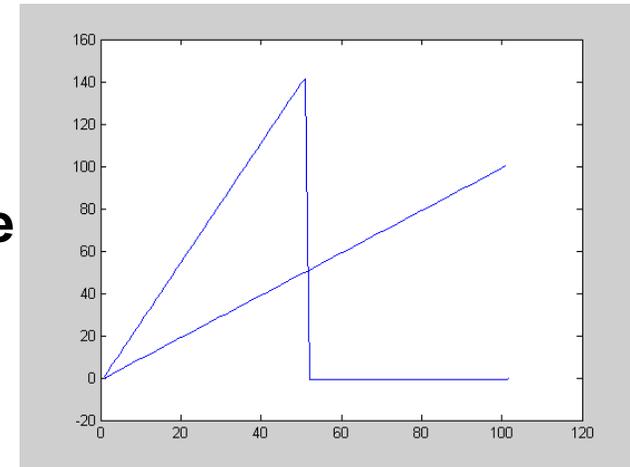
$$h(n) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \quad g(n) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$\tilde{h}(n) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \quad \tilde{g}(n) = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$a_n^0 = \{ \dots, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \}$$

on filtre par  $\tilde{h}(n)$  et on sous-échantillonne

$$a_n^1 = \left\{ \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{13}{\sqrt{2}}, \dots \right\}$$



# Exemple

---

on filtre par  $\tilde{g}(n)$  et on sous-échantillonne

$$d_n^1 = \left\{ \dots -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \dots \right\}$$

Pour la reconstruction on fait l'inverse

$$d_n^1 = \left\{ \dots \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{5}{\sqrt{2}}, 0, \frac{9}{\sqrt{2}}, 0, \frac{13}{\sqrt{2}} \dots \right\} \text{ puis on filtre par } h(n)$$

$$d_n^1 = \left\{ \dots -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \dots \right\} \text{ puis on filtre par } g(n)$$

# Exemple

---

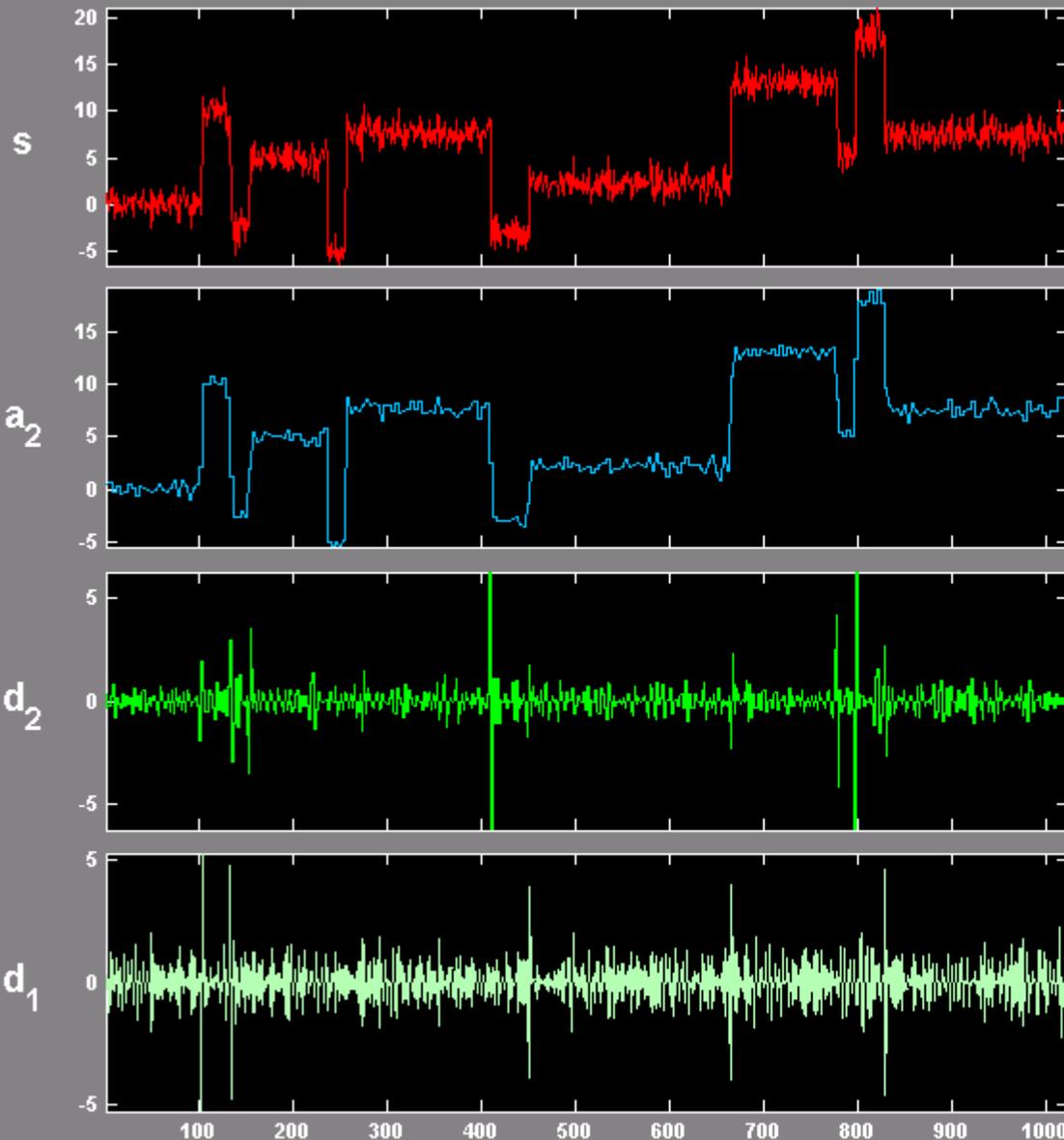
On obtient :

$$\left\{ \dots \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \dots \right\} + \left\{ \dots -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots \right\}$$

et on reconstruit l'approximation originale

$$a_n^0 = \{ \dots, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \}$$

Decomposition at level 2 :  $s = a_2 + d_2 + d_1$ .



Data (Size)

Wavelet

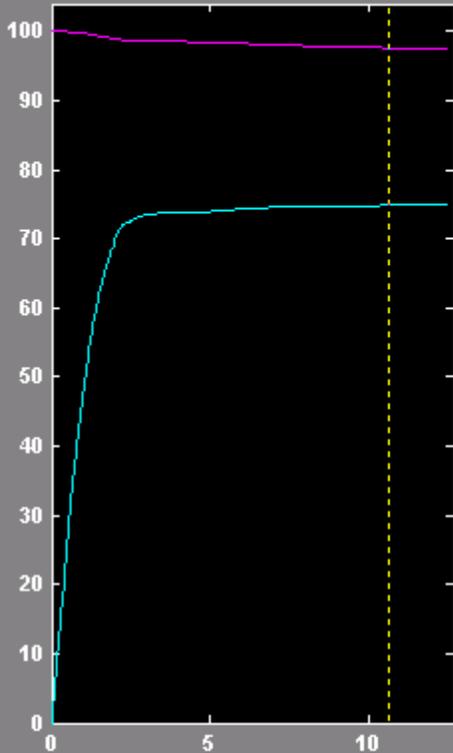
Level

Analyze

Display mode :

at level

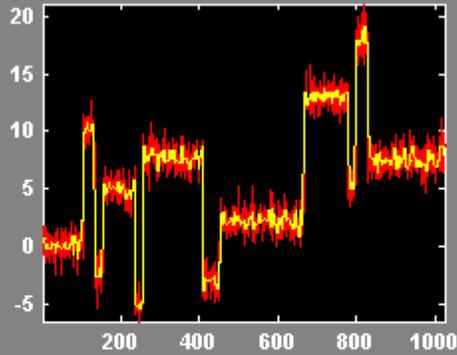
Show Synthesized Sig.



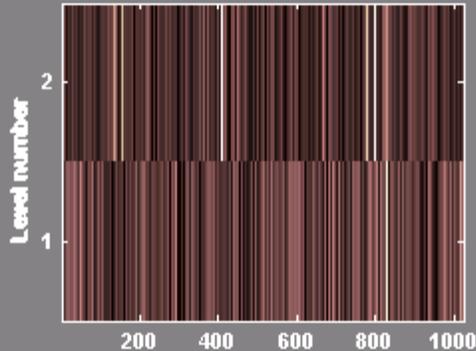
--- Global threshold  
 — Retained energy in %  
 — Number of zeros in %

Retained energy 97.56 % -- Zeros 74.90 %

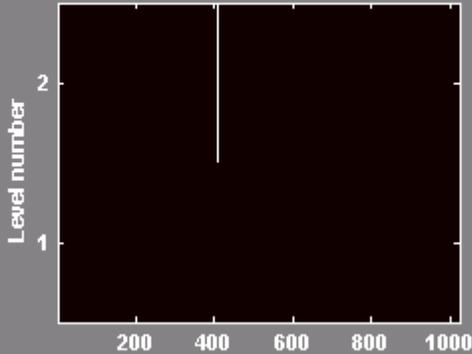
Original and compressed signals



Original coefficients



Thresholded coefficients



Data (Size)

Wavelet

Level

Global thresholding

Select thresholding method

Select Global Threshold

Retained energy  %

Number of zeros  %

Compress

Residuals

Colormap

Nb. Colors

Close

Center On

Info

History

## 4.4. Ondelettes en 2D

Les sous espaces d'approximation sont étendus à 2 dimension

le facteur d'échelle discret  $j$  devient une matrice d'échelle  $J_{2 \times 2}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dans le cas diadique}$$

les coordonnées doivent être entières

**J doit assurer une dilatation dans chaque dimension**

- ses valeurs propres doivent être supérieures à 1
- le facteur de dilatation surfacique est  $\det(\mathbf{J})$

Exemples:

$$\det = -2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det = 2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det = 4 \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

# Fonctions d'Échelle 2D

---

## Dilatation-Translation

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{J}x - n = \mathbf{J} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad \text{translation entière}$$

## Base d'un sous-espace $\mathbf{V}_j$

Fonctions d'échelle à l'échelle  $j$  construites à partir de la fonction mère

$$\varphi_{j,n}(x) = |\det J|^{-\frac{j}{2}} \varphi(\mathbf{J}^{-j}x - n) \quad \text{on translate de } \mathbf{J}^{-j}n$$

base orthonormée de  $\mathbf{V}_j$

$$\langle \varphi_{j,n}, \varphi_{j,k} \rangle = \delta(n - k)$$

$n$  et  $k$  vecteurs d'entiers

# Sur et Sous-échantillonnage

L'image est définie sur un maillage  $\Lambda$  de points en 2D

il est défini par un ensemble de vecteurs entiers

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

par changement d'échelle il se transforme en le maillage

$\Lambda_1$  constitué des points  $\mathbf{m} = \mathbf{J}\mathbf{k}$

Exemple

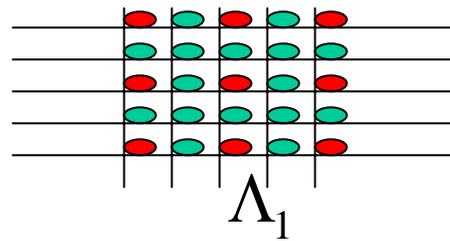
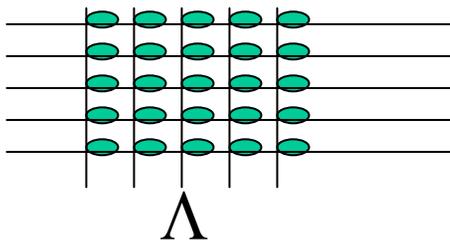
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



points rouges conservés

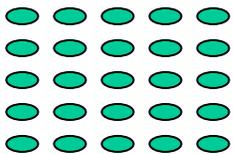
# Sur-Échantillonnage

On note  $x(n) \rightarrow \boxed{\uparrow J} \rightarrow y(n)$

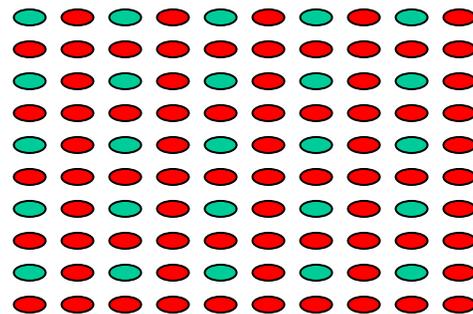
telle que  $y(n) = \begin{cases} x(\mathbf{J}^{-1}n) & \text{si } \mathbf{J}^{-1}n \in \Lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$   $\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

$x(n)$



$y(n)$



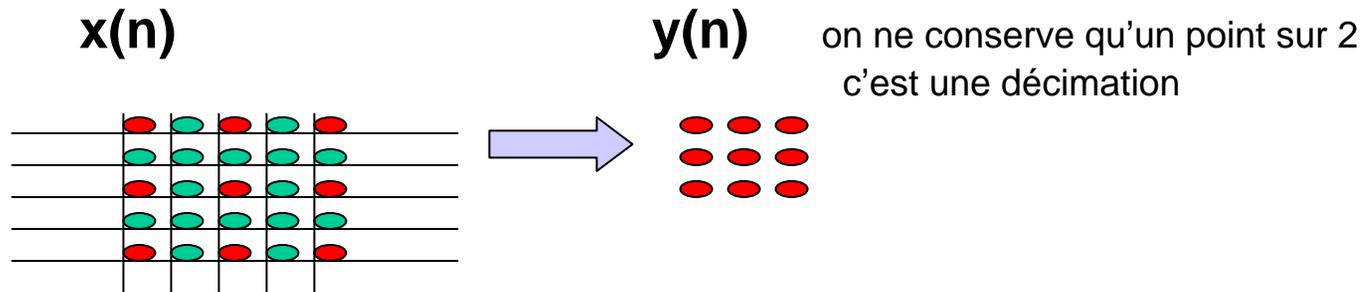
en rouge les zéros ajoutés

# Sous-Échantillonnage

On note  $x(n) \rightarrow \boxed{\downarrow \mathbf{J}} \rightarrow y(n)$

telle que  $y(n) = x(\mathbf{J}n)$

Exemple  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



# Approximations et Détails

---

## Espace d'approximation à l'échelle $j$

$$\mathbf{A}_j \mathbf{u} = \sum_{n \in \Lambda} \langle \mathbf{u}, \varphi_{j,n} \rangle \varphi_{j,n}$$

## Espace des détails

il est engendré par plusieurs bases d'ondelettes

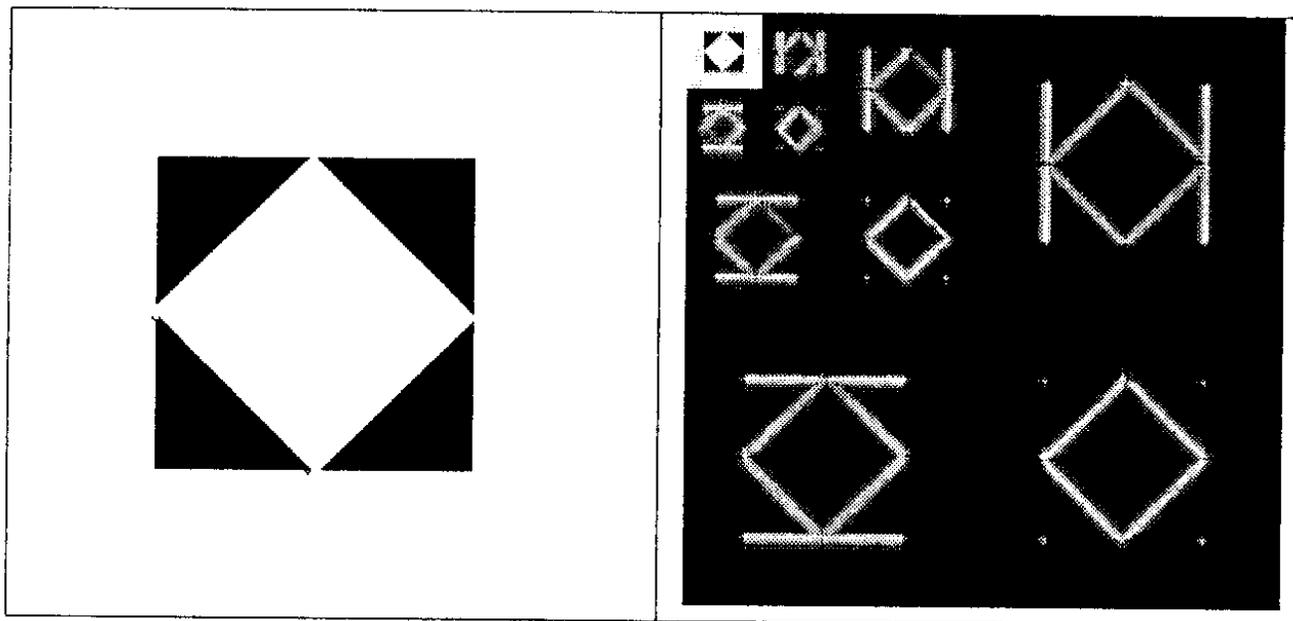
$$D_j \mathbf{u} = \sum_i \sum_{n \in \Lambda} \langle \mathbf{u}, \psi_{j,n}^i \rangle \psi_{j,n}^i \quad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq |\det \mathbf{J}| - 1$$

il y a plusieurs images de détail (3 dans le cas général)  
car il y a plusieurs ondelettes mères  $\psi^i$   
autant que de translations élémentaires définies par  $\mathbf{J}$

$$\psi_{j,n}^i(x) = |\det \mathbf{J}|^{-\frac{j}{2}} \psi^i(\mathbf{J}^{-j} x - n)$$

# Analyse 2D par l'Ondelette de Haar

---

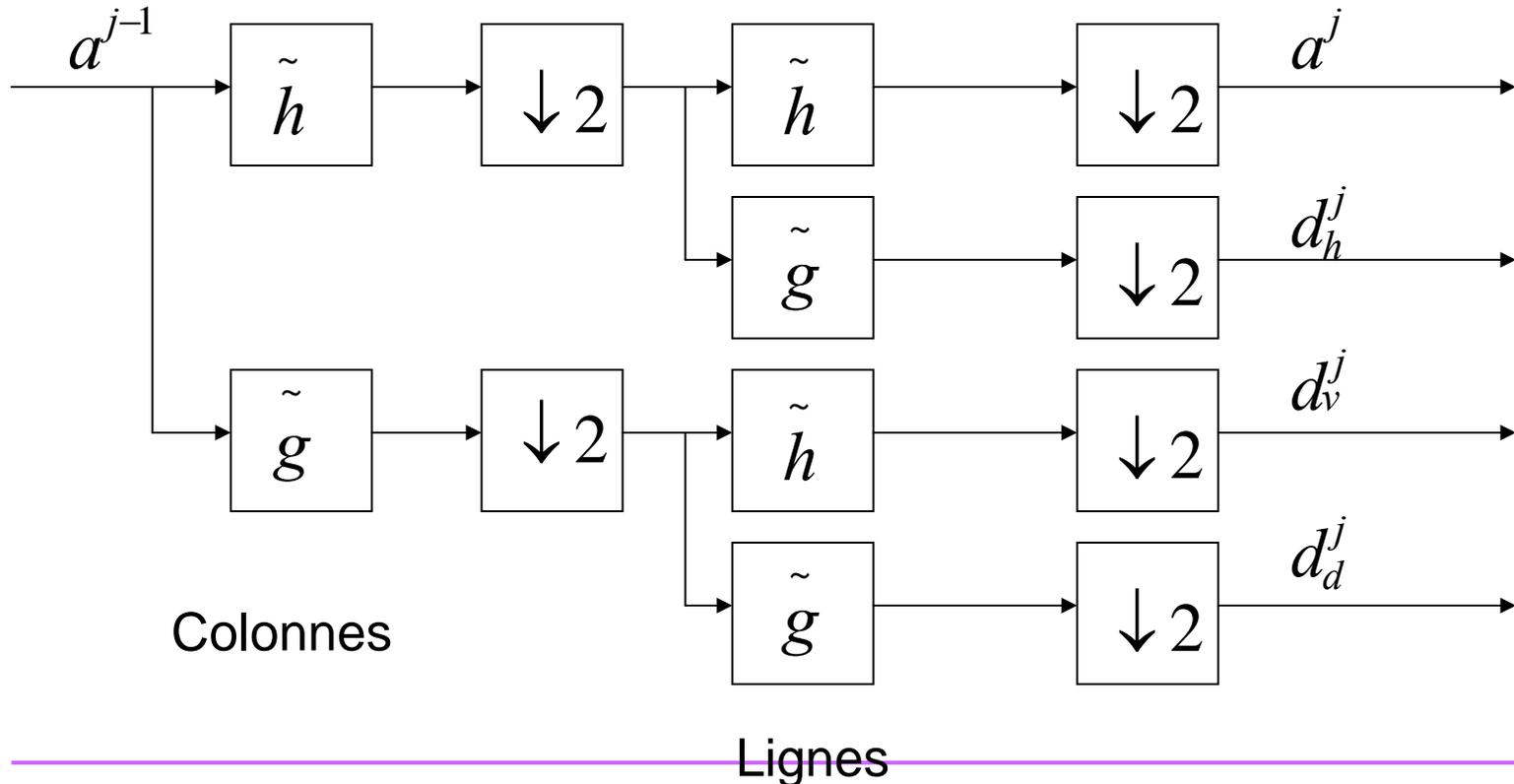


# Analyse en Ondelettes Séparables

Dans le cas dyadique:

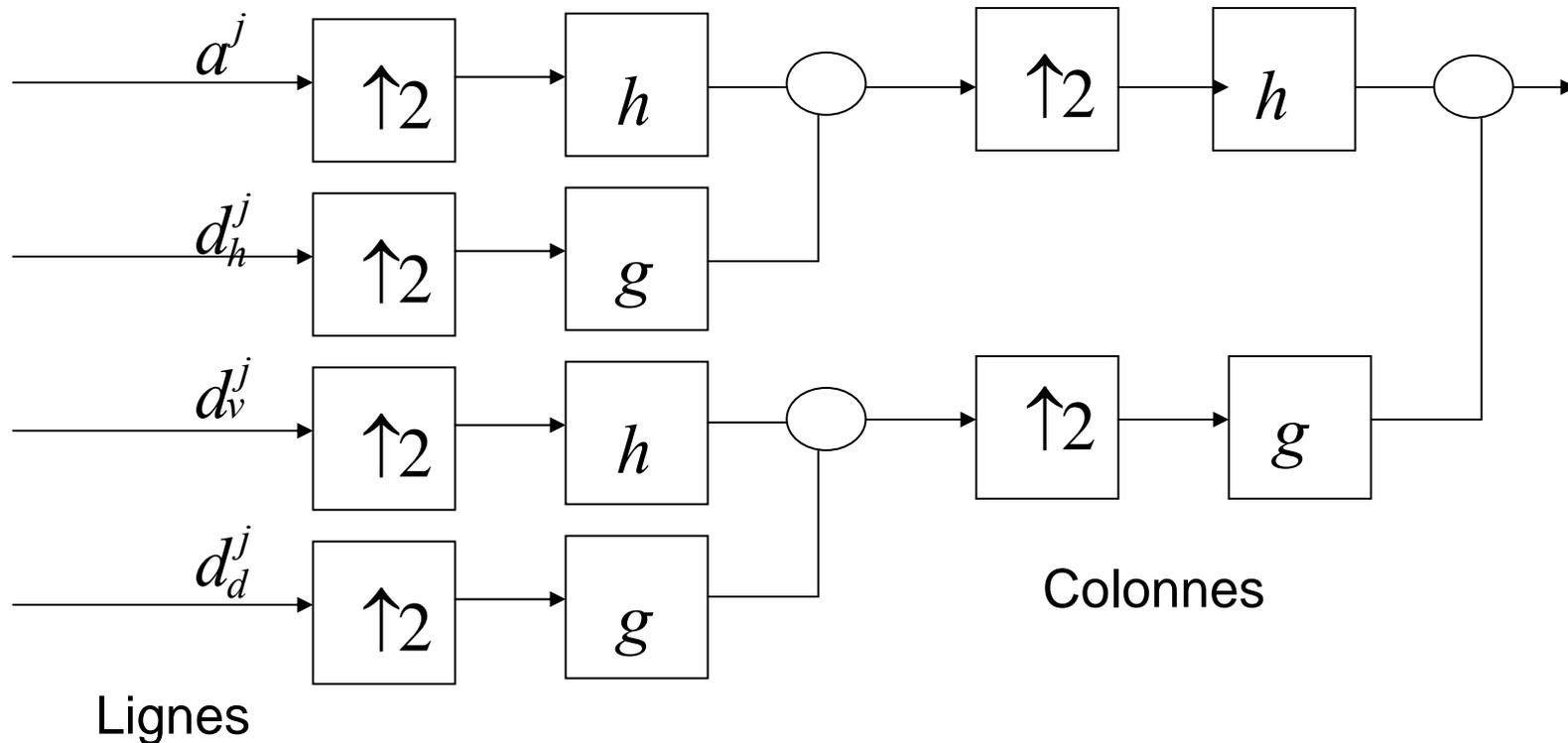
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La dilatation agit indépendamment sur l'horizontale et la verticale  
Donc on peut faire les traitements sur les colonnes puis sur les lignes



# Synthèse avec Ondelettes Séparables

Reconstruction sur les colonnes puis sur les lignes



# Un petit exemple (1)

Originale

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Pour obtenir l'approximation on filtre

les lignes par  $\tilde{h} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

puis sous-échantillonner



0	0	0	0
0	0	0	0
0	1.4	1.4	0
0	1.4	1.4	0
0	1.4	1.4	0
0	1.4	1.4	0
0	0	0	0
0	0	0	0

les colonnes par  $\tilde{h} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

et sous-échantillonner

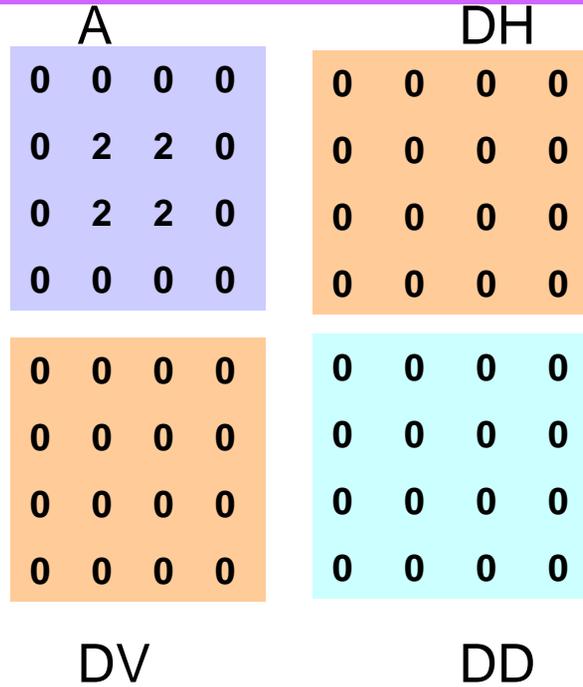


0	0	0	0
0	2	2	0
0	2	2	0
0	0	0	0

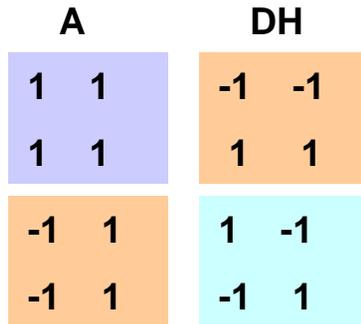
# Un petit exemple (2)

originale

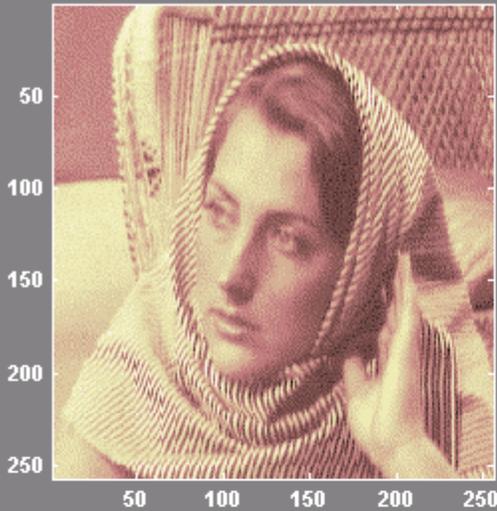
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0



0	0	0	0
0	2	2	0
0	2	2	0
0	0	0	0



Original Image



Approximation coef. at level 2



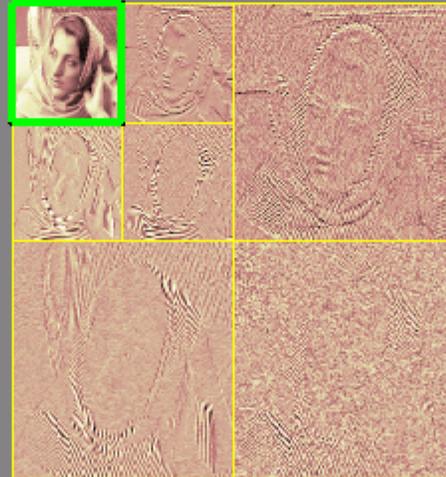
dwt

Synthesized Image



idwt

Image Selection



Decomposition at level 2

Data (Size)

Wavelet

Level

Analyze

Statistics

Compress

Histograms

De-noise

Decomposition at level :

View mode :

Full Size

1	3
2	4

Operations on selected image :

Visualize

Full Size

Reconstruct

Colormap

Nb. Colors

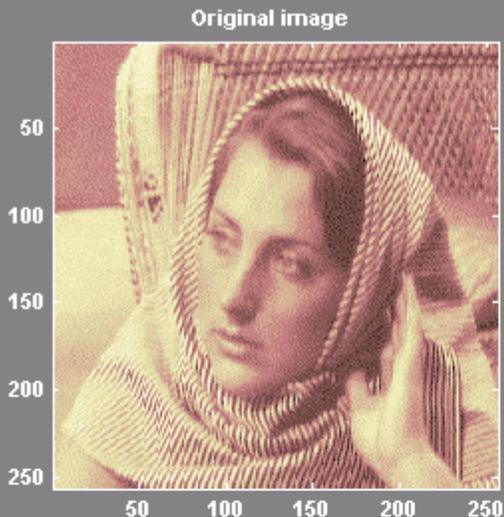
Brightness

Close

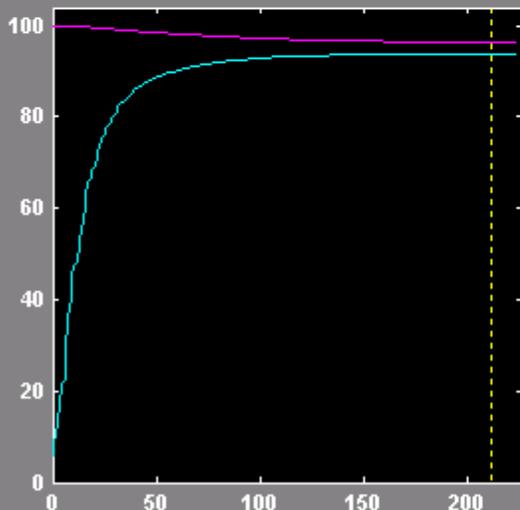
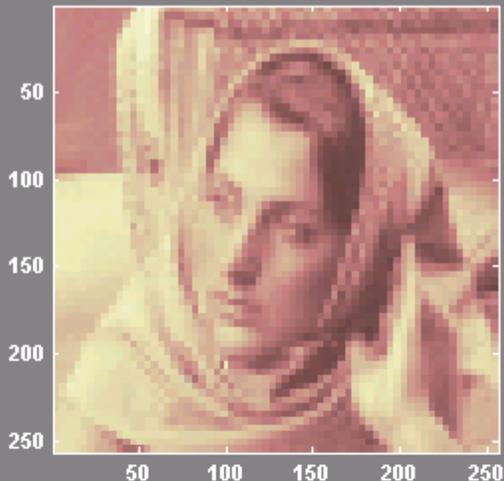
UNIVER

X+	Y+	XY+	Center On	X	Y	Info	X =	History	<-	->	View Axes
X-	Y-	XY-					Y =		<<	>>	

woman (256 x 256) analyzed at level 2 with haar



Retained energy 96.44 % -- Zeros 93.75 %  
Compressed image



--- Global threshold  
— Retained energy in %  
— Number of zeros in %

Data (Size)   
Wavelet   
Level

Global threshold

Select thresholding method  
  
Select Global Threshold  
  
Retained energy  %  
Number of zeros  %

Colormap   
Nb. Colors   
Brightness

X+ Y+ XY+ X- Y- XY- Center On X Y Info X = Y = History View Axes

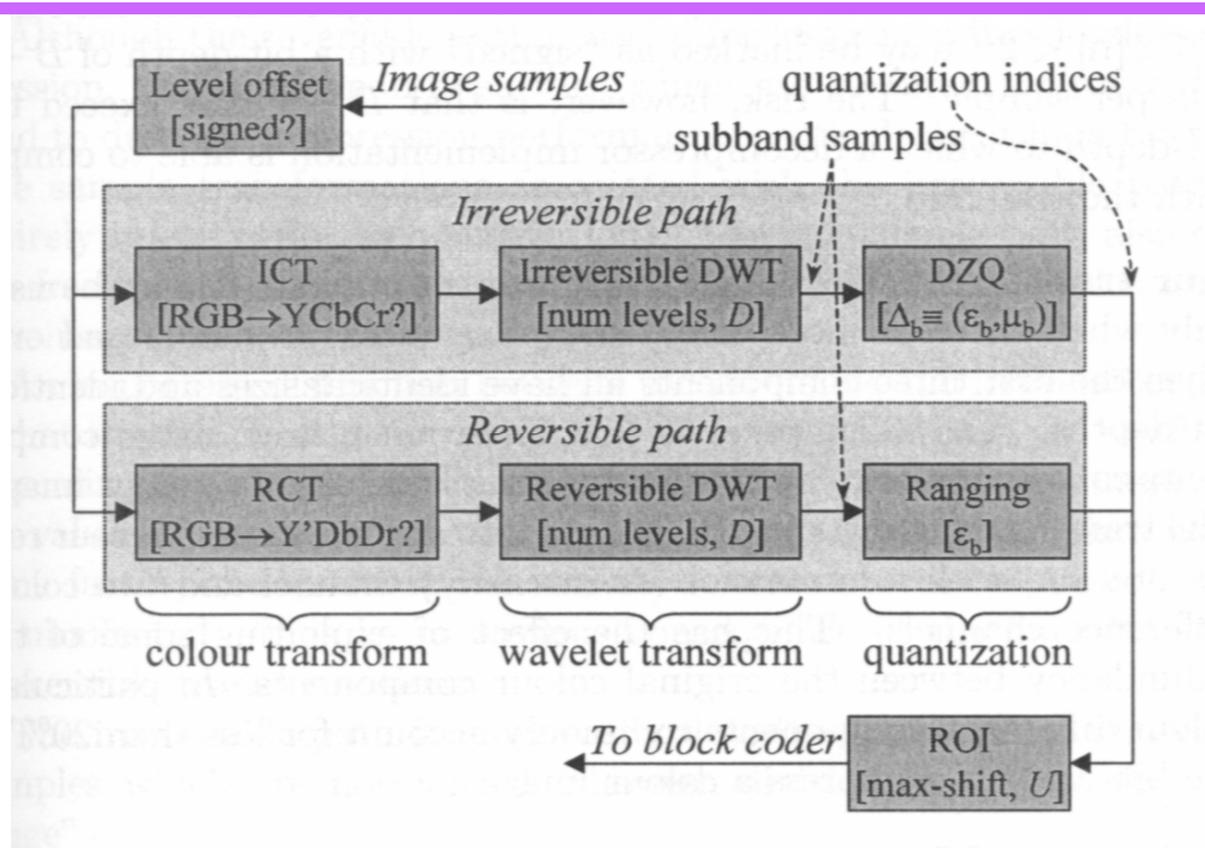
# 4.5. JPEG2000

---

## Les caractéristiques principales :

- Meilleur taux de compression notamment pour des images codées sur peu de bits par pixels.
- Un même schéma de compression pour des images NB que pour des images en niveaux de gris et en couleurs.  
(> 16 bits par couleur)
- Permettre une transmission progressive selon différentes options:
  - Résolution : La résolution augmente au cours du décodage
  - Qualité : la précision (bits/pixel) augmente également
  - Localisation : pas besoin de mémoriser toute l'image
  - Composante : 1 NG, 3 couleur (RVB ou TSI),  
Images d'instruments scientifiques (bandes de fréquences)
- Le fichier est codé selon un mode de progression mais peut être recodé

## 4.5. JPEG2000: Schéma général



**Voie réversible : sans perte**

**transformée en ondelettes sur coefficients entiers**

**Voie irréversible : avec perte**

**transformée en ondelettes sur coefficients réels (Cohen-Daubechies-Feauveau)**

# 4.5. JPEG2000: Codage des couleurs

---

Voie irréversible:

$$\begin{pmatrix} x_y(n) \\ x_{Cb}(n) \\ x_{Cr}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.168736 & -0.331264 & 0.5 \\ 0.5 & -0.418688 & -0.081312 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_R(n) \\ x_G(n) \\ x_B(n) \end{pmatrix}$$

**$x_y$  : Moyenne pondérée des 3 couleurs = Intensité ou luminance (NG)**  
 **$x_{Cb}$  et  $x_{Cr}$  : Différence entre la luminance et le bleu et le rouge**

Inversion

$$\begin{pmatrix} x_R(n) \\ x_G(n) \\ x_B(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.402 \\ 1 & -0.344136 & -0.714136 \\ 1 & 1.772 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_y(n) \\ x_{Cb}(n) \\ x_{Cr}(n) \end{pmatrix}$$

## 4.5. JPEG2000: Codage des couleurs

---

Voie réversible :

$$x_y(n) = \text{floor} \left( \frac{x_R(n) + 2x_G(n) + x_B(n)}{4} \right)$$

$$x_{Db}(n) = x_B(n) - x_G(n)$$

$$x_{Dr}(n) = x_R(n) - x_G(n)$$

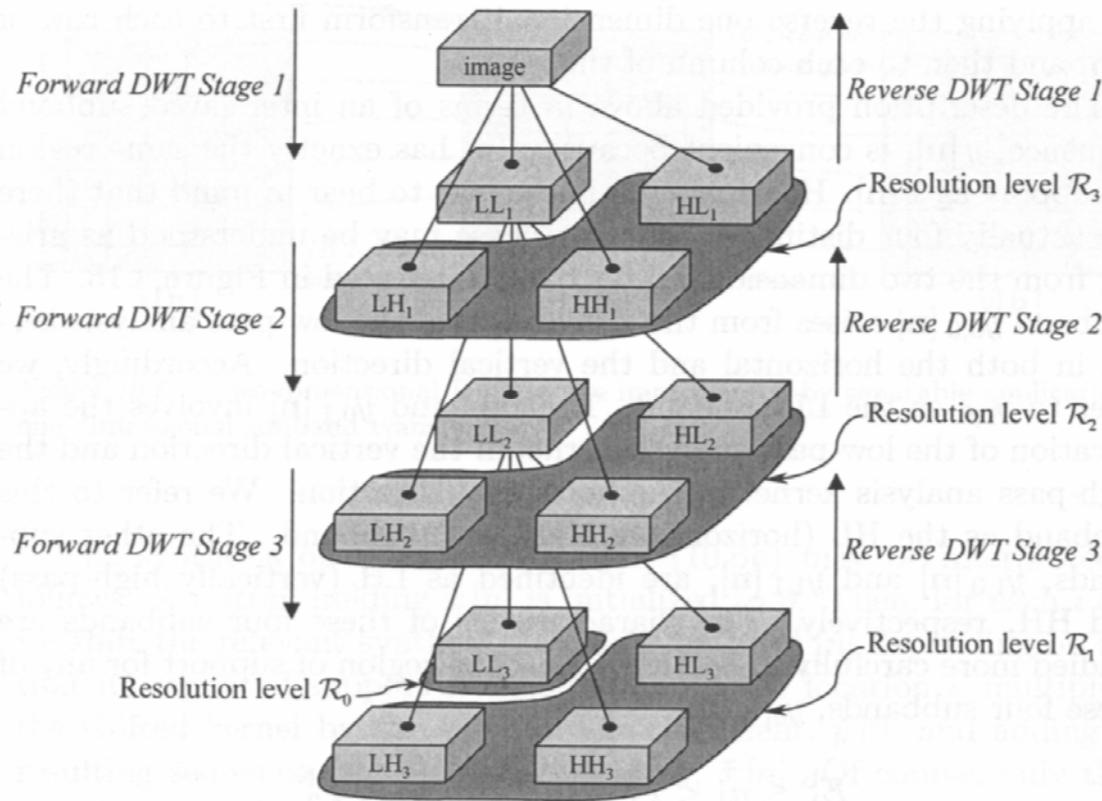
Inversion exacte :

$$x_G(n) = x_y(n) - \text{floor} \left( \frac{x_{Db}(n) + x_{Dr}(n)}{4} \right)$$

$$x_B(n) = x_{Db}(n) + x_G(n)$$

$$x_R(n) = x_{Dr}(n) + x_G(n)$$

# 4.5. JPEG2000: Ondelettes 2D



## 4.5. JPEG2000: Quelles Ondelettes?

---

Pour la compression on choisit les ondelettes selon la nature des filtres qu'elles engendrent. On souhaite:

- Des filtres RIF à phase linéaire (évite les artefacts visuels)

1. Au sens des ondelettes, la phase linéaire conduit à une fonction d'échelle symétrique
2. L'implémentation RIF conduit à une fonction d'échelle de durée limitée

**La fonction d'échelle de Haar est la seule fonction d'échelle qui vérifie ces deux propriétés**

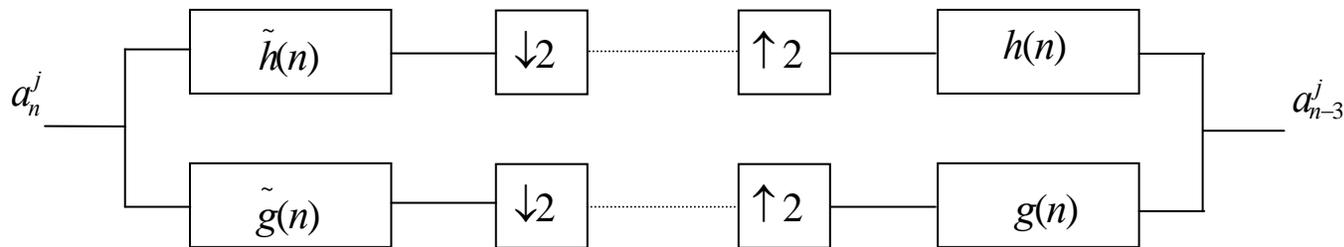
La condition d'orthogonalité est une contrainte très forte

On peut relâcher cette contrainte pour construire des familles d'ondelettes bi-orthogonales

# Ondelettes orthogonales

Fonctions d'échelles et d'ondelettes forment des base orthogonale des espaces d'approximation

Assurent une reconstruction parfaite



propriétés des filtres

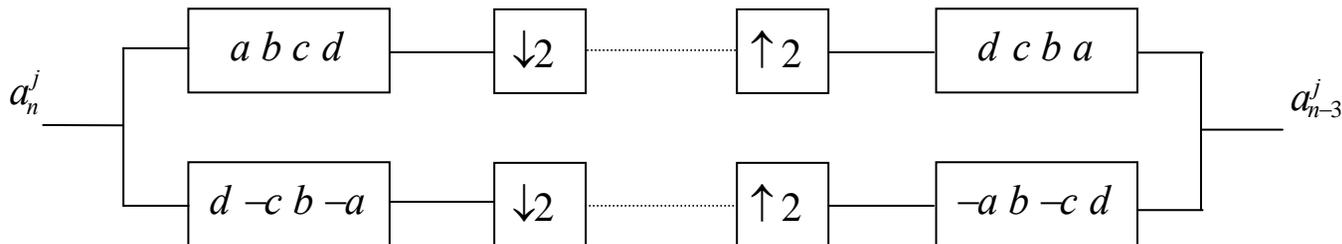
$$h(n) = \tilde{h}(N-n)$$

$$h(n) = \tilde{h}(N-n)$$

$$\tilde{g}(n) = h(n)(-1)^{n+1}$$

$$\tilde{g}(n) = g(N-n)$$

Exemple: reconstruction parfaite avec un retard de 3 échantillons



$$(a \ b \ c \ d) \bullet (d \ -c \ b \ -a) = 0$$

$$(d \ c \ b \ a) \bullet (-a \ b \ -c \ d) = 0$$

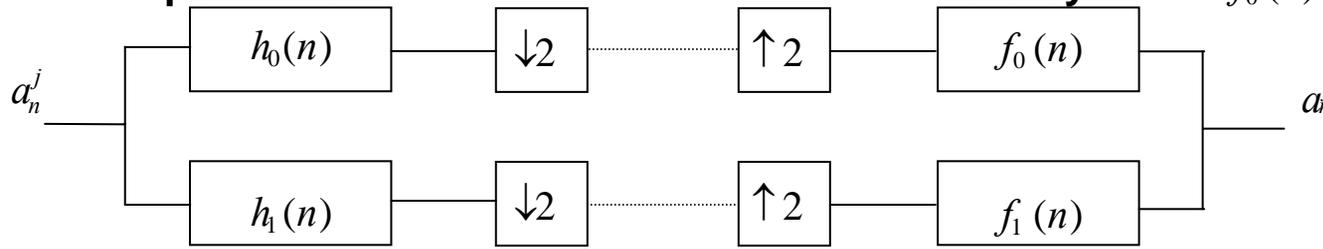
# Ondelettes Biorthogonales

On ne s'impose plus que les fonctions d'échelle et d'ondelette forment des bases orthogonales des espaces d'approximation.

On travaille avec **deux bases (non orthogonales) différentes** à l'analyse et à la synthèse:

$\varphi(t)$  et  $\psi(t)$  permettent de déduire les deux filtres de l'analyse  $h_0(n)$  et  $h_1(n)$

$\tilde{\varphi}(t)$  et  $\tilde{\psi}(t)$  permettent de déduire les deux filtres de la synthèse  $f_0(n)$  et  $f_1(n)$



À partir d'un filtre passe bas  $m_0(z)$  et d'un filtre passe haut  $m_0(z)$  qui doivent vérifier la condition de reconstruction parfaite suivante (bi-orthogonalité)

$$m_0(z)\tilde{m}_0(z^{-1}) + m_0(-z)\tilde{m}_0(-z^{-1}) = 1$$

On déduit les quatre filtres à mettre en oeuvre

$$h_0(z) = \tilde{m}_0(z^{-1})$$

$$h_1(z) = m_0(-z^{-1})$$

$$f_0(z) = m_0(z)$$

$$f_1(z) = \tilde{m}_0(-z)$$

# JPEG2000: Cas irréversible (pertes)

## Ondelette CDF 9/7 Cohen-Daubechies-Feauveau

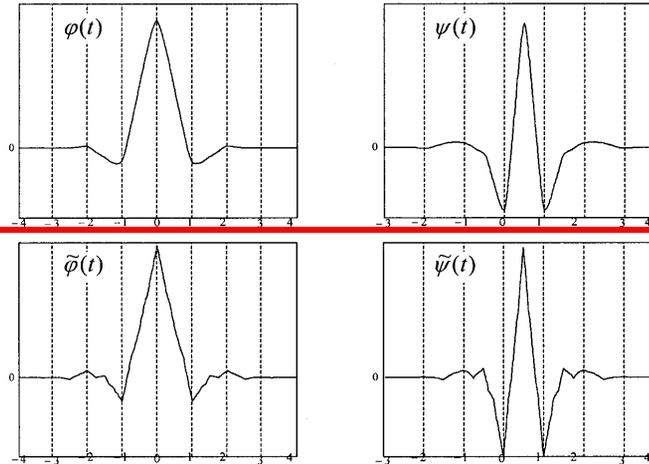
$$\tilde{m}_0(z) = 0.60294901836$$

$$\begin{pmatrix} +0.26686411843 \\ -0.07822326629 \\ -0.01686411843 \\ +0.02674875741 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (z+z^{-1}) \\ (z^2+z^{-2}) \\ (z^3+z^{-3}) \\ (z^4+z^{-4}) \end{pmatrix}$$

$$m_0(z) = 0.55754352629$$

$$\begin{pmatrix} -0.29563588157 \\ -0.02877176314 \\ +0.04563588157 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (z+z^{-1}) \\ (z^2+z^{-2}) \\ (z^3+z^{-3}) \end{pmatrix}$$

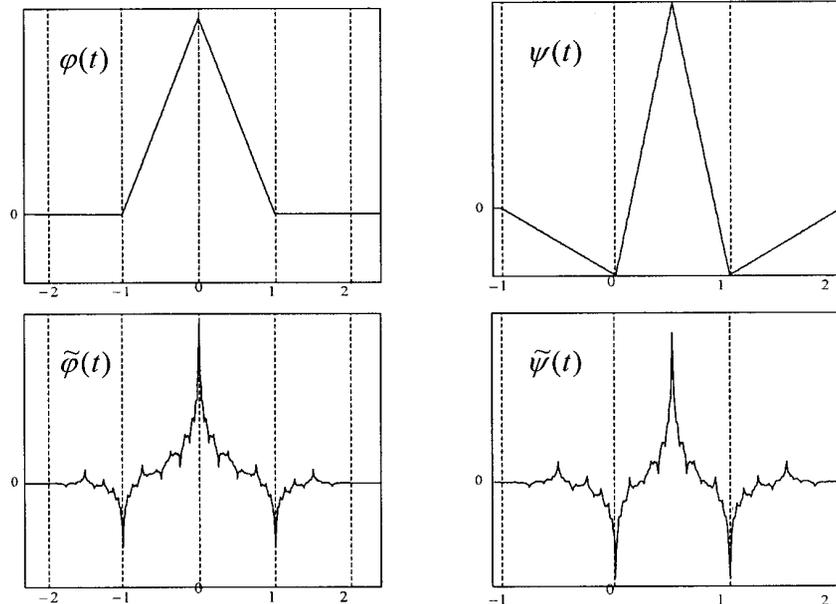
analyse



synthèse

# JPEG2000: Cas réversible (sans perte)

Selon le modèle de l'ondelette Spline 5/3



$$\tilde{m}_0(z) = \frac{-1}{8}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{-1}{8}z^2$$

$$m_0(z) = z^{-1}g(z) = \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z$$

# JPEG2000: Cas réversible (sans perte)

---

Approximation de l'ondelette Spline 5/3 par des calculs sur des valeurs entières

$$d(n) = x(2n+1) - \text{floor}\left(\frac{x(2n) + x(2n+2)}{2}\right)$$

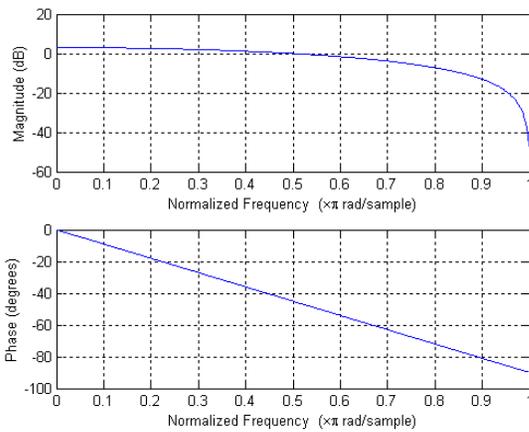
$$a(n) = x(2n) + \text{floor}\left(\frac{2 + d(n-1) + d(n)}{4}\right)$$

$$x(2n) = a(n) - \text{floor}\left(\frac{2 + d(n) + d(n-1)}{4}\right)$$

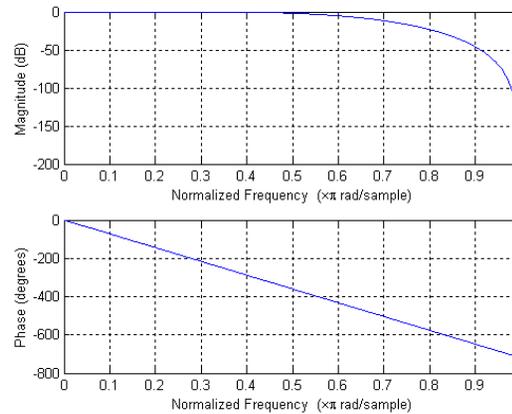
$$x(2n+1) = d(n) + \text{floor}\left(\frac{a(n) + a(n+1)}{2}\right)$$

# Analyse en fréquence

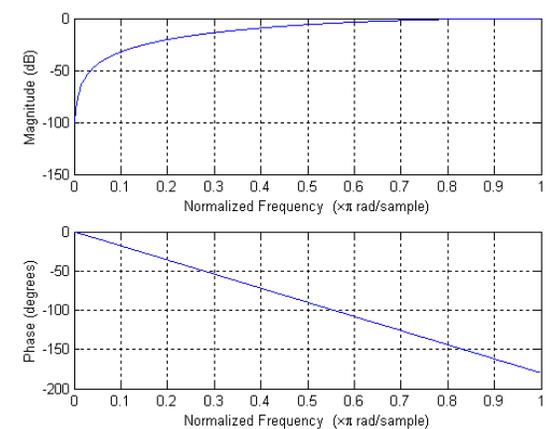
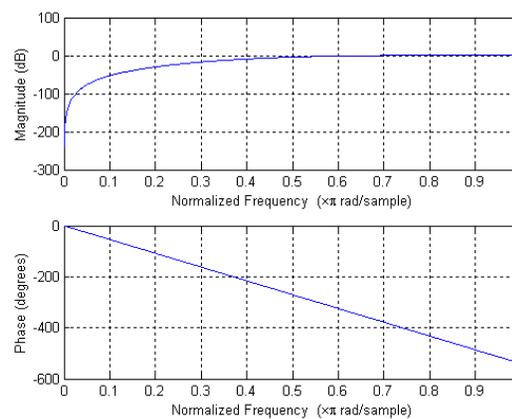
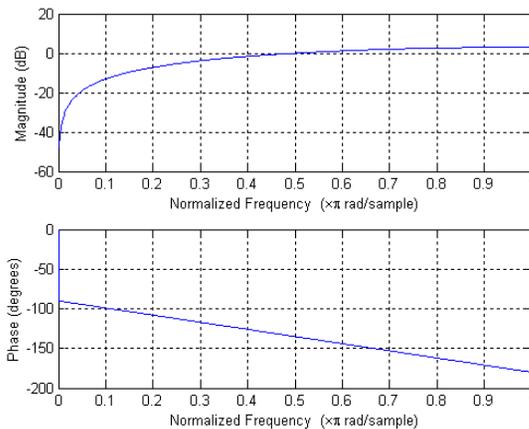
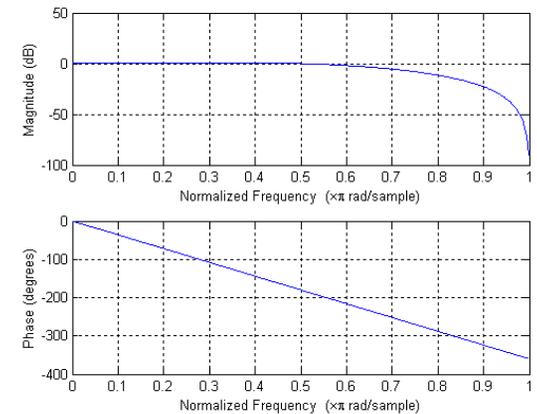
## Analyse de Haar



## Cohen-Daubechie-Fauveau 9/7

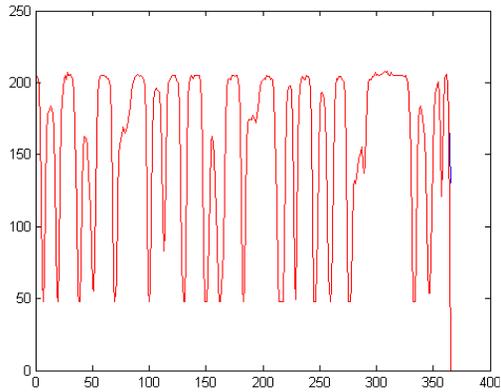


## Spline 5/3

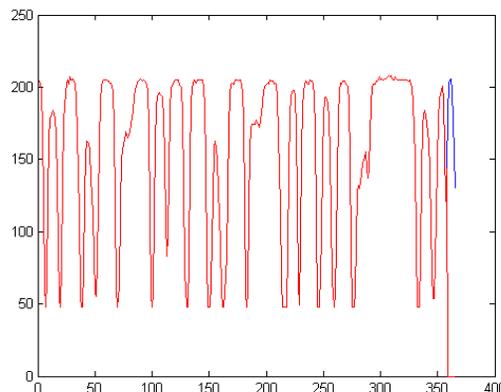


# Analyse en fréquence

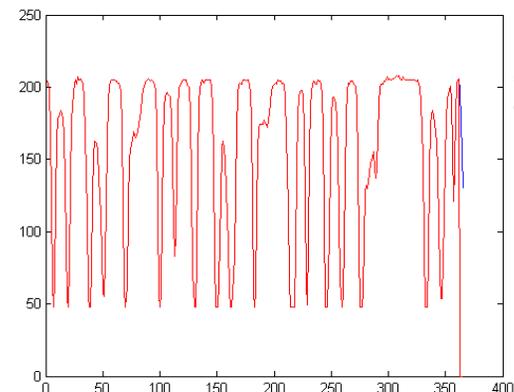
## Analyse de Haar



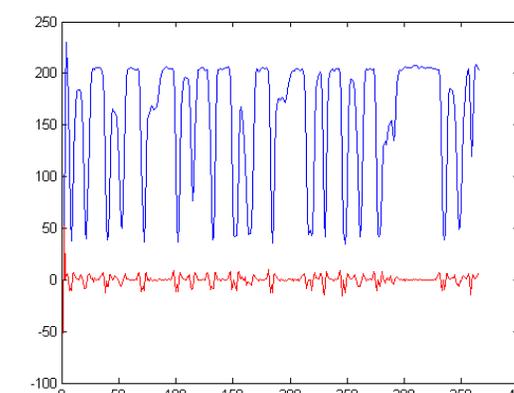
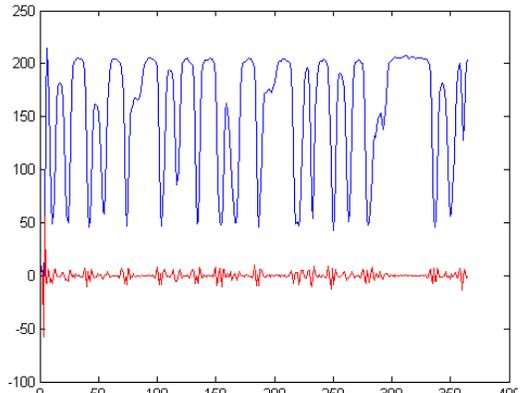
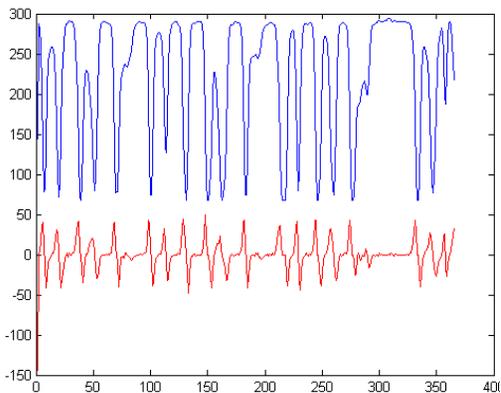
## Cohen-Daubechie-Fauveau 9/7



## Spline 5/3



superposition du signal reconstruit  
(en rouge) avec le signal original en  
bleu analyse sur 1 niveau



Approximations et détails  
au niveau 1

# 5. Compression d'Images de Documents

DjVu: <http://djvu.org/>

---

**Les méthodes de compressions sont adaptées à certains types d'images**

- JBIG, JBIG2 : images bi-tonales (documents)
- JPEG, JPEG2000 : images en niveau de gris (scènes naturelles)

## **DjVU = Déjà Vu**

- est la méthode actuellement la plus efficace pour compresser des images de documents
- Permet d'atteindre des facteurs de compression de 1/1000, 5 à 10 fois supérieurs à JPEG pour une même qualité
- une image scannée à 300 dpi en couleur passe de 25Mo à 60Ko
- une image noir et blanc 300 dpi est réduite en moyenne entre 10 et 30 Ko
- La compression Noir et Blanc apporte un gain de 10 à 20 fois supérieur à JPEG
- Conçu chez ATT Bell Labs

# 5. Compression d'Images de Documents

DjVu: <http://djvu.org/>

---

## Propriétés générales

- Le texte et les traits nécessitent une résolution importante (300 dpi)
- les illustrations et le fond du document peuvent être représentés à une résolution plus faible (100 dpi)
- les images doivent être décrites avec un codage précis des couleurs
- les textes et les dessins ne nécessitent que quelques couleurs

# 5. Compression d'Images de Documents

DjVu: <http://djvu.org/>

---

## Principe de DjVu

- L'image est décomposée selon 3 plans
  - l'arrière plan : contient les images et le fond du papiers
  - le masque : contient le texte et les lignes de dessins (en N et B)
  - l'avant plan : contient les couleurs du masque

## Compression des plans

- L'avant plan et l'arrière plan sont des images en Niveaux de Gris représentées à faible résolution 100dpi et compressées par une méthode à base d'ondelettes (Integer Wavelet transform)
- Le masque est une image binaire compressée avec JBIG2

## DjVu n'est donc pas une méthode de compression

- Repose sur un algorithme performant de séparation de l'information en 2 plans

# 5. Compression d'Images de Documents

DjVu: <http://djvu.org/>

---

## Détection du texte avec DjVu

### Première approche

- On cherche à séparer les pixels en deux classes
  - le masque : contient les pixels des caractères (typiquement noir)
  - l'arrière plan : contient le papier (typiquement blanc)
- **Classification automatique en 2 classes**
  - Step 1: initialiser couleur du fond  $F$  à blanc, couleur du texte à noir  $T$
  - Step 2: affecter tous les pixels de l'image à la couleur la plus proche
  - Step 3: Calculer  $F_{\text{moy}}$  la couleur moyenne des pixels affectés au fond
$$F = F_{\text{moy}}$$
  - Step 4: Calculer  $T_{\text{moy}}$  la couleur moyenne des pixels affectés au texte
$$T = T_{\text{moy}}$$
  - Step 5: boucler en 2 tant que  $F$  et  $T$  évoluent significativement
- **Ne fonctionne pas sur les images de documents réels**
  - Plus de deux couleurs dominantes
  - Les couleurs dominantes évoluent dans le document

# 5. Compression d'Images de Documents

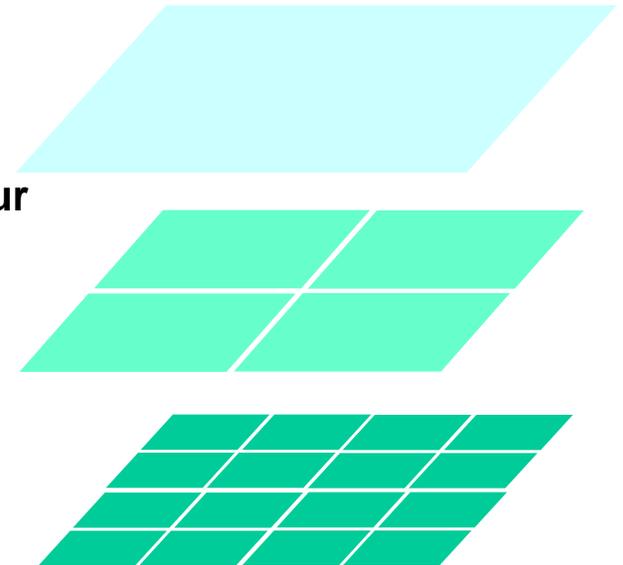
DjVu: <http://djvu.org/>

---

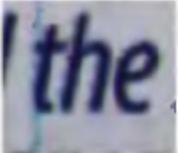
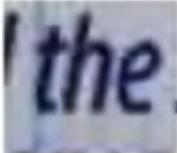
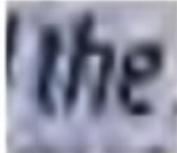
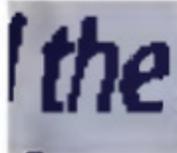
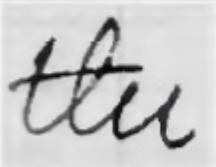
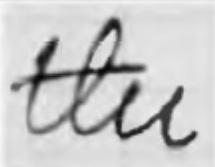
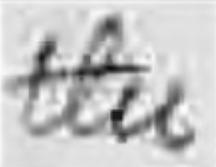
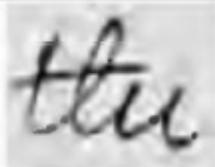
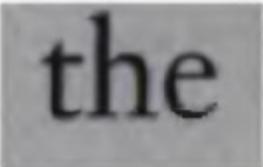
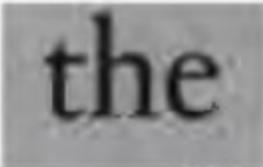
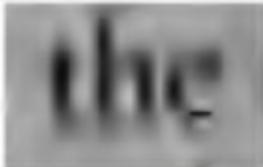
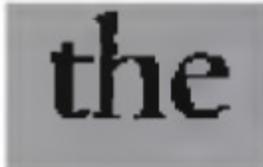
## Détection du texte avec DjVu

### Seconde approche

- On procède par blocs
  - dans chaque bloc on détermine la couleur de fond F et la couleur de texte dominante T
  - Mais certains blocs sont monochromes (bloc du fond)
  - Certains blocs comportent plus de deux couleurs dominantes
- On procède à différentes résolutions
  - Les couleurs F et T sont initialisées aux valeurs trouvées pour le bloc supérieur



# 5. Résultats : JPEG / DjVu

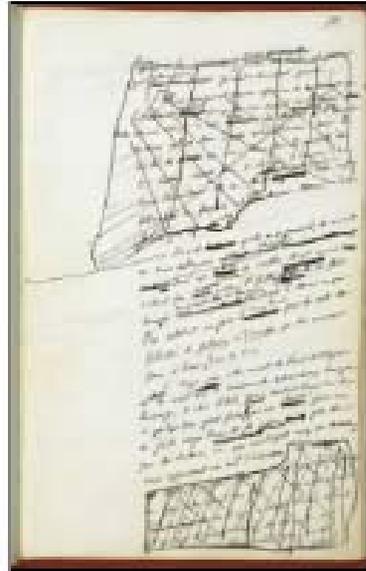
Image Description	Mode FAN Raw image detail	JPEG, 300dpi, quality 20	JPEG, 100dpi, size=DjVu	IW44, 300dpi, size=DjVu	DjVu compressed
Magazine Add % image= 56 ads-freehand-300	 20640K	 292K 70:1	 50K 412:1	 61K 338:1	 52K 396:1
Brattain Notebook % image= 22 brattain-0001	 9534K	 116K 82:1	 17K 560:1	 20K 476:1	 19K 501:1
Scientific Article % image= 46 graham-001	 22013K	 383K 57:1	 41K 536:1	 43K 511:1	 38K 579:1

# 5. Résultats : JPEG / DjVU

<p>Newspaper Article</p> <p>% image= 50</p> <p>lrr-wpost-1</p>					
	12990K	250K 51:1	38K 341:1	42K 309:1	40K 324:1
<p>Cross-Section of Jupiter</p> <p>% image= 73</p> <p>planets-jupiter</p>					
	24405K	284K 85:1	47K 519:1	52K 469:1	47K 519:1
<p>XVIIIth Century book</p> <p>% image= 45</p> <p>cuisine-p006</p>					
	12128K	206K 58:1	35K 346:1	39K 310:1	37K 327:1
<p>US First Amendment</p> <p>% image= 30</p> <p>usa-amend1</p>					
	31059K	388K 80:1	77K 403:1	78K 398:1	73K 425:1

# 5. Résultats : JPEG / DjVU

---



**144 Ko en JPEG**

**69 Ko en DjVU**



# 5 Résultats : IDEC / DIVU

\\MonDossier\Recherche\BM\_Rouen\siteBovary sur portable perso Stéphane Nicolas (Triskell)\siteprojet\_djvu\album\70.djvu

Aviguer Visualiser Mise en page Mesure Aide

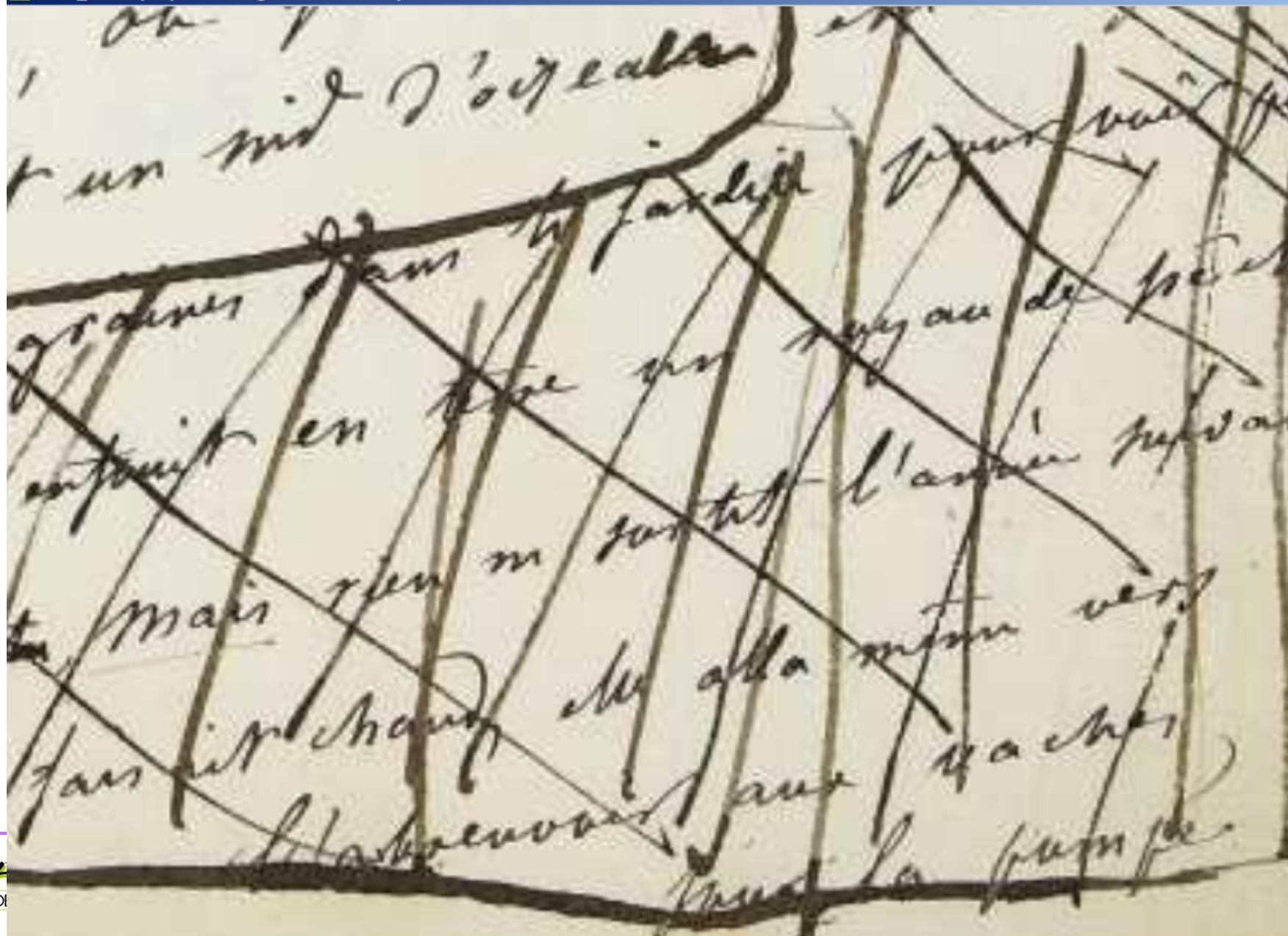


Un cœur que  
J'ai été de ~~mon~~ mon mari (l'âme forte)  
J'en parle n'avait l'air de elle que le charme  
bonne camaraderie on se mêlait ~~encore~~ <sup>à la satisfaction</sup> ~~de~~  
debarqué des paysans et ~~de~~ devienne desorm.  
façon plus ~~est~~.  
Avant ~~l'union~~ qu'elle m'a marié, ~~me~~  
cru avoir de l'amour ~~confondant~~ ~~tristesse~~ <sup>mais</sup> ..  
c'est du résultat de cet amour  
qui se



# 5. Résultats : JPEG / DiVU

0070\_m2 - Aperçu des images et des télécopies Windows



# Exercices

---

## Exercice 1:

**Question 1 :** Calculer la transformée de Haar de l'image ci-dessous. On précisera toutes les étapes de calcul.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

**Question 2 :** Effectuer l'opération inverse à partir du résultat trouvé.

## Exercice 2 :

On rappelle que dans le cas 1D et pour des signaux de durée  $n=8$  échantillons la transformée en cosinus discrets consiste à décomposer le signal sur une base de fonctions cosinus définie par :

$$\cos(f\theta) \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}, \frac{15\pi}{16} \quad \text{et} \quad f \in [0, 1, 2, 3, 4, 4, 6, 7]$$

**Question 1 :** Déterminer les fonctions de la décomposition pour  $n=2$ , et vérifier que les fonctions sont bien orthogonales entre elles.

**Question 2 :** Dans le cas bidimensionnel (image), déterminer les images de la décomposition pour  $n=2$ .

## Exercice 2 :

**Question 1 :** Calculer la DCT de l'image de l'exercice 1.

**Question 2 :** Comparer les résultats des deux représentations compressées de la transformée de Haar et de la DCT.

# Bibliographie

---

**Nicolas Moreau, Techniques de Compression des Signaux, Masson, 1994.**

**David Salomon, Data Compression, The Complete Reference, 2nd Edition, Springer 2000.**

**Frédéric Truchetet, Ondelettes pour le signal numérique, Hermes 1998.**

**D. S. Taubman, M. W. Marcellin, JPEG2000 Image compression Fundamentals, Standards and Practice, Kluwer, 2002.**

**M. Misiti, Y. Misiti, G. Oppenheim, J-M. Poggi, Les ondelettes et leurs applications, Hermes, 2003.**

**A. Trémeau, C. Fernandez-Maloigne, P. Bonton, Image Numérique Couleur, Dunod, 2004.**